



# Traitement et analyse quantitative d'hologrammes numériques

Loïc Denis

## ► To cite this version:

Loïc Denis. Traitement et analyse quantitative d'hologrammes numériques. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Jean Monnet - Saint-Etienne, 2006. Français. NNT : . tel-00282661

**HAL Id: tel-00282661**

**<https://theses.hal.science/tel-00282661>**

Submitted on 28 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Présentée à

l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne

pour obtenir

le grade de : DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE SAINT-ETIENNE

Spécialité : IMAGE

par

**Loïc Denis**

Ingénieur CPE Lyon

et intitulée

## Traitement et analyse quantitative d'hologrammes numériques

soutenue le 20 octobre 2006 devant la commission d'examen :

Rapporteurs :	F. Goudail	Professeur, Institut d'Optique, Paris
	H. Maître	Professeur, École Nat. Sup. des Télécommunications, Paris
Examineurs :	P. Flandrin	Directeur de Recherche, École Normale Supérieure, Lyon
	E. Thiébaut	Astronome, Centre de Recherche Astronomique, Lyon
Directeur :	D. Jeulin	Professeur, École Nat. Sup. des Mines, Paris
Co-directeur :	T. Fournel	Professeur, Université Jean Monnet, St-Etienne





*A la mémoire d'Oscar,*



# Remerciements

---

Je tiens en premier lieu à adresser de profonds remerciements aux professeurs Henri Maître et François Goudail pour avoir rapporté cette thèse. L'intérêt qu'ils ont porté à ce travail est pour moi une belle récompense et un encouragement pour la suite. Je suis également très reconnaissant envers Patrick Flandrin d'avoir accepté la présidence du jury et pour l'éclairage qu'il a apporté sur le sujet lors de la soutenance.

Je souhaite remercier Eric Thiébaud à plus d'un titre. Par son exemplaire générosité, sa vivacité d'esprit et sa grande ouverture, il m'a énormément apporté pendant ma dernière année de thèse. Plus qu'un "chercheur", c'est un génial "trouveur". C'est à lui que revient la paternité de l'approche décrite dans le chapitre 3 de cette thèse. J'aimerais lui témoigner ici mon admiration et mes sincères remerciements pour les échanges que nous avons pu avoir ainsi que pour sa présence dans mon jury de thèse.

J'ai eu la chance de bénéficier d'une double direction de thèse très complémentaire. Dominique Jeulin a montré un intérêt et une continuité dans son suivi que la distance St-Etienne — Fontainebleau n'a pas émoussés. Je tiens à le remercier pour son recul scientifique et le sérieux de son engagement dans cette thèse. Thierry Fournel a su trouver le parfait équilibre, me laissant une grande autonomie tout en étant présent pour franchir les étapes (épreuves?) semées sur le parcours du doctorant : redéfinition du sujet de thèse, préparation des articles, des transparents pour les congrès, .... Je souhaite le remercier pour sa sincérité, son investissement dans ce sujet, ses conseils et ses nombreux encouragements.

Ce travail a été rendu possible par les nombreux échanges avec Corinne Fournier, enseignante-chercheuse au laboratoire TSI et véritable moteur de la problématique "holographie numérique". J'ai beaucoup appris en pragmatisme, persévérance, et sur le métier d'enseignant comme de chercheur en travaillant avec elle. Je lui suis très reconnaissant pour sa grande disponibilité et sa confiance.

J'ai pu apprécier l'efficacité et la réactivité de Ferréol Soulez, doctorant au laboratoire TSI et avec qui j'ai travaillé pendant ma dernière année de thèse sur le problème de la détection de micro-particules (chapitre 3 de cette thèse). J'ai eu également de nombreuses discussions très enrichissantes avec Christophe Ducottet, enseignant-chercheur au laboratoire TSI et chef de l'équipe IMAGE.

J'ai énormément apprécié l'accueil et la bonne humeur qui règne dans l'équipe IMAGE à la fois entre les doctorants, mais aussi avec les permanents. J'adresse donc mes vifs remerciements à chacun.

Enfin, j'aimerais témoigner ma reconnaissance envers mes collègues du laboratoire TSI ainsi que de l'école d'ingénieurs ISTASE de Saint-Etienne pour les échanges et bons moments passés ensemble pendant ces trois années.



# Table des matières

---

<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Principales notations</b>	<b>xi</b>
<b>Contexte</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Caractéristiques de l’holographie numérique en ligne</b>	<b>5</b>
1 Contexte : étude 3D de micro-objets . . . . .	5
1.1 Vélométrie pour la mécanique des fluides . . . . .	6
1.2 Contrôle en ligne . . . . .	6
2 La technique d’holographie en ligne . . . . .	7
2.1 De l’optique au numérique : histoire d’une (r)évolution . . . . .	7
2.2 Les montages d’holographie . . . . .	8
2.3 Justification de l’utilisation du montage de Gabor . . . . .	9
2.4 Paramètres du montage . . . . .	9
3 Restitution d’un hologramme . . . . .	10
3.1 Restitution optique d’un hologramme . . . . .	10
3.2 Modélisation de la restitution optique . . . . .	12
3.3 Transformée de Fresnel : propriétés, implémentation . . . . .	12
3.4 Restitution numérique . . . . .	14
4 Interprétation de la problématique de restitution numérique . . . . .	17
4.1 Modélisation de la formation d’un hologramme . . . . .	17
4.2 Codage de l’information sur l’hologramme . . . . .	19
4.3 Approche filtrage et détection optimale . . . . .	20
4.4 Approches d’analyse . . . . .	21
4.5 Approche “problème inverse” . . . . .	30
4.6 Approche stéréologique . . . . .	31
5 Étude du bruit en holographie numérique en ligne . . . . .	31
5.1 Bruit de montage . . . . .	31
5.2 Bruit de caméra . . . . .	33
5.3 Bruit de modèle . . . . .	34
6 Conclusion . . . . .	37

<b>2</b>	<b>Filtrage de l'image jumelle : débruitage des images restituées</b>	<b>41</b>
1	Origine et caractéristiques de l'image jumelle . . . . .	41
1.1	Origine de l'image jumelle . . . . .	41
1.2	Caractéristiques de l'image jumelle . . . . .	43
2	Suppression de l'image jumelle : état de l'art . . . . .	47
2.1	Modification du montage optique . . . . .	48
2.2	Méthodes numériques . . . . .	49
3	Débruitage par filtrage non-linéaire d'un hologramme de micro-objets . .	56
3.1	Principe . . . . .	56
3.2	Gommage itératif . . . . .	57
3.3	Illustrations . . . . .	59
4	Conclusion . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Approche "problème inverse" pour la détection de particules</b>	<b>65</b>
1	Modélisation du problème de détection de micro-particules . . . . .	65
1.1	Limites de l'approche classique . . . . .	65
1.2	Problème direct . . . . .	68
1.3	Problème inverse . . . . .	68
2	Principe de l'algorithme . . . . .	70
2.1	Localisation grossière . . . . .	71
2.2	Optimisation locale . . . . .	74
2.3	Gommage . . . . .	76
3	Résultats . . . . .	78
3.1	Analyse d'hologrammes simulés . . . . .	78
3.2	Analyse d'hologrammes expérimentaux d'un jet rectiligne . . . . .	79
4	Conclusion . . . . .	85
<b>4</b>	<b>Analyse directe d'un hologramme par stéréologie en projection</b>	<b>87</b>
1	Rappels de stéréologie et de morphologie mathématique . . . . .	87
1.1	La covariance morphologique . . . . .	88
1.2	Rose des intercepts et rose des orientations . . . . .	90
2	Estimation du covariogramme géométrique moyen . . . . .	92
2.1	Propriétés de l'amplitude complexe diffractée . . . . .	92
2.2	Propriétés de l'intensité de l'hologramme . . . . .	93
2.3	Autocorrélation d'une assemblée de micro-objets – obtention du covariogramme géométrique moyen . . . . .	96
3	Analyse quantitative du covariogramme géométrique moyen . . . . .	99
3.1	Estimation de la taille moyenne de particules sphériques . . . . .	99
3.2	Analyse de l'orientation d'objets anisotropes . . . . .	102
4	Applications . . . . .	109
4.1	Détermination de la taille moyenne de gouttelettes . . . . .	109
4.2	Reconstruction de la distribution d'orientation de fibres . . . . .	115
5	Conclusion . . . . .	122

Conclusion	125
Bibliographie	127





# Principales notations

---

## Optique

$\underline{t}$ ou $t$	transmittance complexe ou réelle
$\underline{a_z}$	amplitude complexe d'un objet ( $\underline{a_z} = 1 - \underline{t}$ )
$\vartheta$	ouverture réelle d'un objet ( $\vartheta = 1 - t$ )
$x$ et $y$	coordonnées spatiales transversales
$z$	coordonnée spatiale longitudinale (i.e. distance à l'hologramme)
$\Delta$	taille du pixel
$j$	imaginaire pur unité
$\psi$	phase d'une amplitude complexe
$\lambda$	longueur d'onde
$\underline{h_z}$	fonction de Fresnel
$I_H$	distribution d'intensité de l'hologramme

## Traitement du signal

$\mathcal{F}[\cdot]$	transformée de Fourier
$\delta$	distribution de Dirac
$\Re(\cdot)$	partie réelle
$\arg()$	argument d'un nombre complexe
$*$	produit de convolution (en général 2D)
$\star$	produit de corrélation (en général 2D)
$\Pi$	fonction porte
$\sqcup\sqcup$	peigne de Dirac
$g$	réponse impulsionnelle
$F_I$	réponse impulsionnelle du filtre inverse
$\mathcal{C}$	fonction de coût des moindres carrés pondérés
$W$	fenêtre de pondération
$S$	spectre de puissance

## Stéréologie

$D$	diamètre d'une micro-particule (sphérique)
$\gamma$	rose des intercepts
$\bar{k}$	covariogramme géométrique moyen
$K_D$	covariogramme géométrique d'un disque
$K_{t,L,\theta,\phi}$	covariogramme géométrique d'une fibre



# Contexte

---

Ce travail de thèse a été réalisé au laboratoire Traitement du Signal et Instrumentation<sup>1</sup>, unité mixte de recherche entre le CNRS et l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne. Ce laboratoire d'une centaine de chercheurs est membre du Pôle Optique Rhône-Alpes et décline des activités en optique et photonique (optique ultra-brève, fibres optiques, réseaux de diffraction, biophotonique) et en traitement de l'image (analyse d'image, techniques de reconstruction, architectures spécifiques). Ce sujet de thèse s'inscrit de le cadre d'une action transversale entre les équipes d'optique et l'équipe IMAGE.

Depuis sa création par Jean-Paul Schon, l'équipe IMAGE (Image, Modélisation, Architecture et Géométrie) développe une partie de ses activités autour de la visualisation et de la métrologie pour la mécanique des fluides. Après de nombreuses contributions apportées au domaine de la vélocimétrie par image de particules (PIV), la thèse de Corinne Fournier, soutenue en 2003, a été une première expérience de l'équipe en holographie numérique et a lancé cette thématique. Thierry Fournel, co-directeur de la thèse, Corinne Fournier et Christophe Ducottet participent au développement de cette thématique.

Ce travail a été réalisé sous la direction de Dominique Jeulin, du Centre de Morphologie Mathématique de l'École des Mines de Paris. Les aspects théoriques ont bénéficié d'une collaboration très enrichissante avec Éric Thiébaud, du Centre de Recherche Astronomique de Lyon (CRAL) et Ferréol Soulez, doctorant au laboratoire TSI et au CRAL. Les aspects expérimentaux ont été développés en partie grâce à un partenariat avec Jean-Louis Marié et Charles Goepfert du Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique de l'École Centrale de Lyon et dans le cadre du projet thématique de la Région Rhône-Alpes "Propriétés et usages des papiers et cartons".

---

<sup>1</sup>le laboratoire LTSI devient laboratoire Hubert Curien le 1<sup>er</sup> septembre 2006.



# Introduction

---

Après de premiers balbutiements à la fin des années 80 et au cours des années 90, l'holographie numérique a attiré une attention croissante depuis le début des années 2000. Principalement développée par et pour des opticiens, cette technique s'ouvre aujourd'hui aux utilisateurs finaux (mécaniciens, microscopistes) et aux "traiteurs" d'images.

L'holographie numérique a toujours été considérée dans une perspective de système d'imagerie : l'hologramme, enregistré dans une première étape, est ensuite restitué numériquement et donne une image tridimensionnelle des objets holographiés. Nous développons dans cette thèse une approche différente avec l'objectif de réaliser une analyse *quantitative* des hologrammes. Au lieu de concentrer nos efforts sur le traitement des images restituées numériquement, nous plaçons l'hologramme au centre de notre attention. Nous interprétons donc le codage de l'information dans l'hologramme sous l'angle du traitement du signal et de l'image et proposons des traitements adaptés au type d'objets étudiés et à la grandeur à mesurer.

Nous nous plaçons dans ce travail dans le cadre des hologrammes de micro-objets. Ces hologrammes répondent à un enjeu applicatif fort autour de la mesure en mécanique des fluides et du contrôle en ligne de micro-objets.

Nous apportons dans ce travail de premières réponses à deux questions jusqu'alors restées ouvertes :

- comment détecter des objets situés hors champ et dont la figure de diffraction est fortement tronquée ?
- comment extraire rapidement à partir d'un hologramme l'information de taille ou d'orientation d'une population d'objets répartie en trois dimensions ?

Le chapitre 1 présente le contexte d'étude des micro-objets. L'évolution des différents montages d'holographie est rappelée et l'utilisation du montage de Gabor est justifiée pour les micro-objets. Nous décrivons ensuite le principe de la restitution numérique d'un hologramme. Le problème de la restitution numérique est alors interprétée sous différents angles : selon une analyse à l'aide de transformées multi-échelles (transformée de Fourier fractionnaire, transformées en ondelettes), selon une approche type "problèmes inverses" et selon une approche stéréologique. Les différentes sources de bruit sont ensuite décrites dans le contexte de la formation de l'hologramme.

Les méthodes d'analyse d'hologrammes présentées dans les chapitres suivants s'inscrivent dans le cadre de ces démarches de traitement de l'image au sens large (filtrage en ondelettes, techniques de déconvolution et problèmes inverses, stéréologie).

Le chapitre 2 traite plus en détails du bruit d'image jumelle qui représente le bruit dominant dans les images 3D restituées. L'origine de ce bruit est identifiée et une interprétation physique est donnée aux images jumelles. Les techniques existantes de sup-

pression de l'image jumelle sont ensuite passées en revue en mettant en évidence les liens entre les différentes approches. Devant l'absence d'une méthode adaptée à la nature de nos hologrammes, nous proposons une technique de filtrage non linéaire inspirée du débruitage en ondelettes et de l'interprétation physique que nous avons donnée de l'image jumelle. Cette technique met en évidence le lien indissociable entre le débruitage et la segmentation d'un volume restitué.

Nous proposons alors dans le chapitre 3 de reconsidérer le problème de détection de micro-particules dans un hologramme sous forme d'un problème inverse. Cette approche qui rompt avec l'analyse classique des volumes restitués permet de s'affranchir des nombreuses limites (dont l'image jumelle) d'une telle analyse. Un algorithme itératif réalisant la détection progressive des figures de diffraction de chacune des particules est décrit. Il est ensuite prouvé sur des hologrammes expérimentaux qu'il est possible de détecter la position et la taille de particules situées hors du champ du capteur grâce à notre nouvelle approche. Les premiers résultats semblent indiquer que la précision des mesures fournies par l'algorithme surpasse toutes les méthodes existantes. Un tel algorithme, extrêmement précis, est cependant lourd et traite actuellement un hologramme en plusieurs dizaines de minutes.

Le chapitre 4 ouvre une nouvelle voie de traitement des hologrammes permettant l'extraction rapide d'une partie de l'information contenue dans les franges d'interférence de l'hologramme. La stéréologie fournit un cadre adapté pour développer des techniques d'extraction de l'information de taille moyenne ou d'orientation des objets à partir de l'autocorrélation d'un hologramme. Les mesures réalisées, d'une précision moindre, permettent d'envisager un traitement en ligne des hologrammes.

# CHAPITRE 1

## Caractéristiques de l’holographie numérique en ligne

---

*Dans cette partie, les fondements de l’holographie numérique en ligne sont présentés et interprétés en terme de traitement du signal.*

*Le contexte d’étude d’objets microscopiques en volume par holographie numérique est tout d’abord introduit. La technique d’imagerie par holographie est présentée et l’utilisation du montage de Gabor justifiée dans notre contexte. La méthode classique de restitution numérique d’un hologramme ainsi que sa forte analogie optique sont ensuite décrites. La problématique de restitution est alors interprétée en terme de traitement du signal et de l’image. Enfin, la formation de l’image-hologramme est modélisée ainsi que le bruit de speckle propre à l’holographie.*

### 1 Contexte : étude 3D de micro-objets

Dennis Gabor, lors la présentation de ses travaux sur l’holographie pour la remise du prix Nobel de physique en 1971, commenta le problème suivant [Gab71] :

*“Déterminez la taille de gouttelettes sortant d’un bec d’injection à la vitesse de 2 Machs. La taille des gouttelettes est probablement de quelques microns et plus. N’importe quel physicien se serait avoué impuissant devant un tel problème. Grâce à l’holographie, il suffit d’enregistrer un simple hologramme en ligne du jet, la plaque holographique située à une distance confortable, avec un laser ruby pulsé (20-30 nanosecondes).”*

Aujourd’hui encore[FGM<sup>+</sup>06], l’holographie est la technique la plus appropriée pour répondre à ce problème.

L’étude d’objets de taille microscopique (entre 10 et 500  $\mu m$ ) répartis dans un volume (nuage, spray, bulles ou traceurs en suspension dans un liquide) représente un enjeux applicatif important. Imager de tels objets pose un réel problème car les deux contraintes suivantes semblent auto-exclusives :

- acquisition rapide du volume,



- bonne résolution des objets.

La première contrainte est indispensable pour permettre l'étude d'objets en mouvements. Un balayage du volume ne peut donc pas être envisagé pour ce type d'application. La technique d'imagerie utilisée doit donc présenter une profondeur de champ capable de contenir le volume étudié. Cette contrainte de profondeur de champ élevée se traduit en imagerie classique par une résolution spatiale amoindrie, ce qui va à l'encontre de la seconde contrainte applicative : bonne résolution des objets.

Dans certaines applications, une mesure tridimensionnelle de la position des objets est requise. L'holographie, par sa capacité à enregistrer sous la forme d'une image 2D (l'hologramme) une information 3D sur les objets illuminés, est la technique la plus adaptée pour imager ce type d'objets. Nous décrivons dans les paragraphes suivants les domaines applicatifs envisagés.

## 1.1 Vélocimétrie pour la mécanique des fluides

La compréhension des écoulements complexes ainsi que le recalage des modèles de mécanique des fluides nécessitent de pouvoir réaliser des *mesures tridimensionnelles* de trajectoire et de vitesse. Le suivi de traceurs, soit naturels (bulles, gouttelettes), soit ajoutés au fluide (particules opaques), est alors réalisé par imagerie. Deux types d'approches sont possibles. Une analyse statistique du déplacement d'un sous-ensemble des traceurs (hypothèse de champ de déplacement localement uniforme) peut être réalisée par corrélation : c'est la technique de Particle Image Velocimetry (PIV) introduite par Jean-Paul Schon[SDM<sup>+</sup>79]. Pour une population de traceurs moins importante, ou dans le cas d'une turbulence importante, une approche statistique n'est plus possible et un suivi de chaque traceur dans le temps est alors réalisé : technique de Particle Tracking Velocimetry (PTV, [NKH89]).

La contrainte d'imagerie posée par la profondeur des volumes d'étude que nous avons évoquée a longtemps été contournée en limitant l'étude à une tranche (laser) du volume et à une mesure de champs denses. Des techniques classiques d'imagerie, ou d'imagerie stéréoscopique peuvent alors être mises en œuvre. Elles ne livrent l'information tridimensionnelle que dans une tranche de l'écoulement. Le développement de l'Holographic Particle Image Velocimetry (HPIV) [Roy77], puis de sa version numérique, la Digital Holographic Particle Image Velocimetry (DHPIV)[MY00, PM03, Kre05, Fou03, MACL04] donne accès aux trois composantes des vecteurs vitesse. La nature même des hologrammes (enchevêtrement de franges d'interférence) ainsi que la quantité d'information contenue dans une série d'images-hologrammes posent de vrais problèmes de traitement du signal et d'algorithmie auxquels nous proposons dans cette thèse plusieurs pistes de réponse.

## 1.2 Contrôle en ligne

Le contrôle des procédés industriels dans le domaine des poudres ou des fibres nécessite dans certains cas de pouvoir imager et mesurer taille et orientation de petits objets. C'est notamment le cas des fibres de papier qui sont mélangées à des charges

(adjuvants minéraux) et mises en suspension dans de l'eau lors de la première étape de fabrication du papier. Les propriétés d'orientation des fibres de papier et d'aggrégation des charges (taille des amas) sont déterminantes pour les qualités du papier. Pour réaliser un contrôle en ligne dans de telles applications il est nécessaire de maîtriser toute la chaîne depuis la technique d'imagerie (adaptée aux petits objets en volume) aux algorithmes de traitement (respectant les contraintes du temps réel de l'application).

Une partie des travaux présentés dans cette thèse s'attache au développement d'algorithmes capables d'extraire directement l'information de taille ou d'orientation depuis un hologramme numérique. Ces développements ont été réalisés dans le cadre du programme thématique Matériaux 2003-2005 de la région Rhône-Alpes "Structure et propriétés d'usage des papiers et cartons" en collaboration avec le LG2P<sup>1</sup> (INPG-CNRS), le L3S<sup>2</sup> (UJF-CNRS), l'ESRF<sup>3</sup>, et la société Arjo Wiggins<sup>4</sup>.

## 2 La technique d'holographie en ligne

Nous retraçons dans cette partie les étapes qui, depuis l'invention de l'holographie à la fin de la première moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, ont permis de réaliser la révolution numérique. Les différents montages holographiques sont ensuite décrits et le montage de Gabor est défini comme le plus pertinent pour notre problématique d'étude de petits objets. Enfin, les paramètres du montage ainsi que les conditions qu'il doit vérifier sont analysées.

### 2.1 De l'optique au numérique : histoire d'une (r)évolution

Le principe d'un microscope sans lentille fonctionnant grâce aux interférences de la lumière a été proposé par Dennis Gabor en 1948[Gab48]. La mise en œuvre expérimentale ne commencera cependant qu'une décennie plus tard, au début des années 60, avec l'apparition des premiers lasers. La maturation théorique qui a précédé les premières réalisations expérimentales ainsi que les travaux menés parallèlement dans le domaine des micro-ondes ont permis à Leith et Upatnieks[LU62] de proposer rapidement un montage capable de surmonter le principal défaut de l'holographie : l'apparition d'une image "jumelle" lors de la restitution. Ce nouveau montage, appelé "hors axe" par opposition au montage "en ligne", pose néanmoins le problème de la séparation des ordres (effective uniquement à l'infini).

Le principe d'une restitution numérique d'un hologramme est proposé dès les années 70 par Yaroslavskii[KMY72], l'un des précurseurs de la synthèse d'hologrammes (le calcul d'un hologramme numérique, ensuite restitué optiquement pour la visualisation tridimensionnelle). De nouveaux algorithmes et des approches originales sont proposées

---

<sup>1</sup>Laboratoire de Génie des Procédés Papetiers de l'École Française de Papeterie.

<sup>2</sup>Laboratoire Sols, Solides, Structures.

<sup>3</sup>European Synchrotron Radiation Facility.

<sup>4</sup>Arjo Wiggins est une multinationale qui conçoit, produit et commercialise des papiers au sens large du terme (supports pour la communication écrite, l'art, la sécurité, l'habitat, l'automobile ou encore la mode). Ses marques les plus connues du grand public sont Canson et Arches.

à la fin des années 80 pour le traitement numérique et l'amélioration d'hologrammes numérisés[OS87]. Les progrès technologiques réalisés dans le domaine des caméras numériques (résolution, dynamique) ont permis dans les années 90 l'enregistrement direct des hologrammes sur une caméra numérique[SJ94]. Il devint alors possible d'acquérir et de traiter numériquement les hologrammes. Le développement chimique des plaques holographiques ainsi que l'analyse au moyen d'un montage optique des hologrammes ne s'imposèrent plus, la voie numérique permettant de réduire considérablement les contraintes expérimentales de la technique holographique. Depuis les années 2000, l'holographie numérique est un domaine de recherche très actif. Elle devient ainsi une technique utilisable hors des laboratoires d'optique, comme le soulignent les éditeurs du numéro spécial sur l'holographie numérique de la revue Applied Optics début 2006[PYJ06] : "Digital holography is at the beginning of an era of use as a common tool in science and technology".

## 2.2 Les montages d'holographie

Le principe de l'holographie est d'enregistrer toute l'information (du grec *holos graphen* : tout écrire) sous la forme de franges d'interférences apparaissant sur un capteur. L'interférence entre l'onde de référence et l'onde diffractée par l'objet code sous forme d'une modulation d'intensité l'information tridimensionnelle issue de l'objet. Le signal enregistré peut ensuite être restitué par diffraction de l'onde d'enregistrement sur l'hologramme.

### Classification des montages

Plusieurs montages sont possibles pour enregistrer un hologramme[Kre05, RS03]. On distingue ainsi :

- suivant la nature de l'onde de référence :  
pour une onde plane (ou quasi-plane) : l'holographie de Fresnel ; pour une onde sphérique : l'holographie de Fourier ;
- suivant le parcours des ondes objet et de référence :  
pour un parcours identique : l'holographie de Gabor ; pour un parcours différent (montage à deux bras), on distingue les configurations en réflexion et en transmission ;
- suivant l'angle entre les deux ondes incidentes sur le capteur :  
pour un angle nul : l'holographie en ligne ; pour un angle non nul : l'holographie hors axe (configuration de Leith et Upatnieks).

### Le montage de Gabor

Le montage de Gabor (Fig. 1.1), utilisé en optique mais également en rayonnement X et en microscopie électronique, est-il un montage holographique ? La question peut se poser puisque les ondes de référence et objet ne sont pas séparées. L'hologramme enregistré est simplement la figure de diffraction de Fresnel (à distance finie) de l'objet.

La dualité pupille diffractante / écran percé d'un trou permet cependant d'exprimer l'onde diffractée par l'objet comme l'interférence entre l'onde de référence et l'onde diffractée par des sources secondaires réparties dans l'objet. Ainsi, l'holographie de Gabor peut s'interpréter dans le cadre habituel de l'holographie [Goo96].

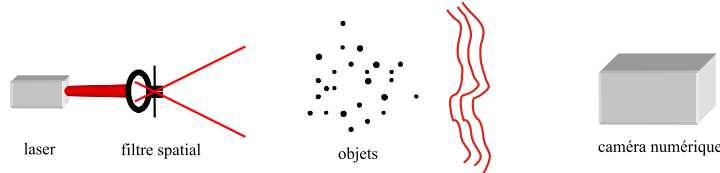


Fig. 1.1 — Le montage de Gabor (holographie en ligne).

### 2.3 Justification de l'utilisation du montage de Gabor

Si l'étude d'objets plans ou quasi-plans est classiquement réalisée à l'aide d'un montage hors-axe, l'analyse de petits objets microscopiques répartis dans un volume nécessite quant à elle un montage en ligne afin de ne pas introduire de trop grandes fréquences (difficiles à échantillonner sur une caméra numérique). De plus, la taille du champ de vue est critique pour ces applications et utiliser un montage hors axe réduirait, par la présence des ordres 0 et -1, la taille effective du champ.

D'un point de vue applicatif, la simplicité du montage et sa stabilité (robustesse aux vibrations) sont des atouts importants pour la généralisation de son utilisation hors des laboratoires. La simplicité de mise en œuvre rend la technique accessible à des non-opticiens. L'illumination du capteur étant directe, il est possible de suivre des phénomènes rapides (faibles temps d'intégration).

Pour toutes ces raisons, le montage de Gabor est choisi pour la métrologie en mécanique des fluides [Roy77, MY00, Kre05, Hin02, XMA00].

### 2.4 Paramètres du montage

Nous décrivons qualitativement, dans ce paragraphe, l'influence de chacun des paramètres de ce montage. La modélisation de la formation d'un hologramme développée en section 4.1 permettra de justifier quantitativement cette approche descriptive. Ces aspects ont été étudiés dans les références [Kre05, SJ04, Fou03].

**Source** La source utilisée doit être cohérente et monochromatique. L'onde issue de la source doit être quasi-plane. En pratique, une onde légèrement divergente permet d'obtenir un grossissement des objets. La longueur d'onde définit l'“échelle” à laquelle la lumière “voit” le montage. Nous parlerons plus tard de transformation d'échelle (section 3.3) pour décrire l'influence de la longueur d'onde et de la distance d'enregistrement.

**Objets** Les objets étudiés doivent avoir une taille très supérieure à la longueur d'onde pour permettre une modélisation dans le cadre de la théorie scalaire de la

diffraction[Goo96]. L'expression de la relation entre la transmittance des objets et l'hologramme est linéaire si ceux-ci sont de taille très inférieure à la taille du capteur (section 4.1). La gamme des micro-objets que nous avons définie :  $[10\mu m, 500\mu m]$  est compatible avec ces deux contraintes.

**Capteur** Les figures de diffraction de Fresnel de chacun des objets enregistrées dans l'hologramme dépendent de sa distance d'enregistrement. Plus celle-ci est importante, plus le lobe central de la figure de diffraction est large. La distance d'enregistrement doit donc être ajustée afin de permettre l'acquisition sur le support du capteur des objets contenus dans la zone d'étude.

L'utilisation d'un capteur numérique introduit une contrainte supplémentaire liée à l'échantillonnage des franges d'interférence de l'hologramme. La distance d'enregistrement doit être supérieure à une limite fixée par le théorème d'échantillonnage de Shannon pour que les franges produites par les objets ne créent pas de repliement spectral dans l'hologramme discrétisé.

## 3 Restitution d'un hologramme

Nous nous plaçons dorénavant dans le cadre de l'holographie de Gabor sans objectif, même si la plupart des résultats peuvent se généraliser aux autres configurations décrites dans le paragraphe 2.2.

### 3.1 Restitution optique d'un hologramme

Avant de décrire les approches possibles pour analyser numériquement un hologramme, nous rappelons ici le principe utilisé pour restituer optiquement un hologramme.

#### 3.1.1 Principe

La première étape, l'enregistrement de l'hologramme, a pour but de stocker à la fois l'amplitude et la phase de l'onde objet. La phase est conservée grâce aux interférences produites par l'ajout d'un "fond cohérent" (l'onde de référence). Les maxima d'intensité sur l'hologramme correspondent donc aux points où les deux ondes (objet et référence) sont en phase. Si l'on faisait diffracter l'onde de référence par les maxima d'intensité de l'hologramme, on reconstruirait par conséquent une onde de même phase que l'onde objet. Cette explication intuitive[Gab71] reste valable si l'hologramme entier (et pas seulement ses maximums) diffracte l'onde de référence : c'est le principe de la restitution. Le montage de Gabor de restitution consiste donc à ré-éclairer l'hologramme avec la même onde de référence. L'hologramme diffracte l'onde incidente et forme deux images de l'objet : une image réelle en aval de l'hologramme et une image virtuelle en amont (l'image "jumelle").

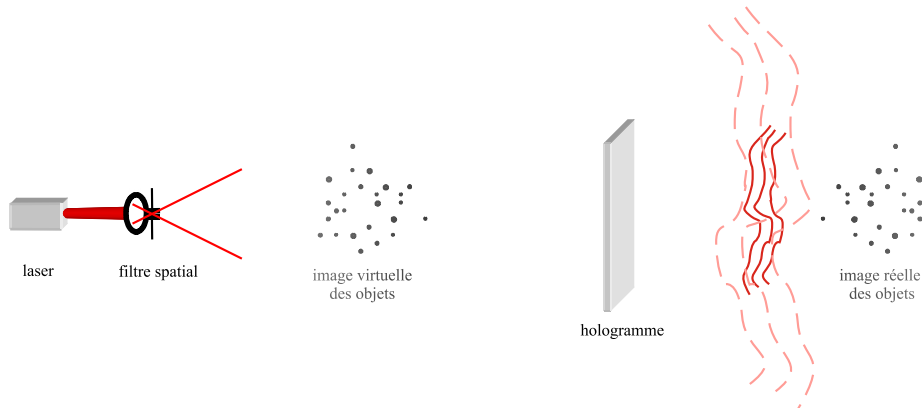


Fig. 1.2 — Le montage de restitution optique de Gabor

### 3.1.2 Correction des aberrations

Les travaux de Gabor ont été motivés[Gab71] par le besoin d'améliorer les images formées en microscopie électronique. La résolution atteinte était bien meilleure que celle obtenue avec les meilleurs microscopes optiques, mais cependant décevante parce que légèrement insuffisante pour résoudre les réseaux atomiques. Les aberrations sphériques, très fortes pour une lentille électronique, limitaient l'ouverture des lentilles. Le compromis aberrations sphériques / diffraction ne permettait pas à la fin des années 1940 d'espérer atteindre l'échelle atomique.

L'idée géniale de Gabor a été alors d'enregistrer un hologramme en ligne, avec les aberrations sphériques propres à la microscopie électronique, puis de restituer optiquement cet hologramme, en reproduisant les aberrations de l'onde de référence afin de les corriger simultanément à la restitution (voir illustration fig. 1.3).

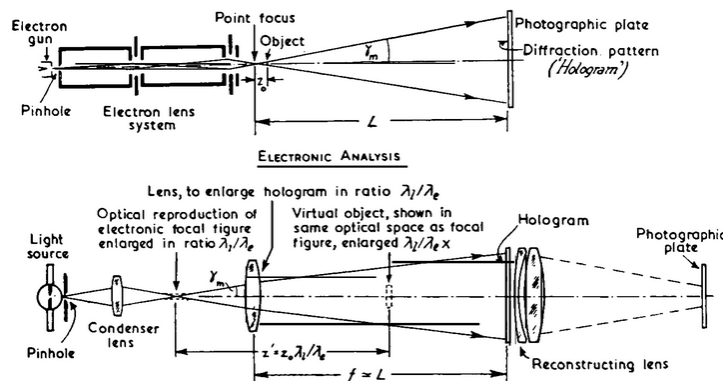


Fig. 1.3 — Montage d'enregistrement et de restitution de Gabor permettant la correction des aberrations des lentilles électroniques (d'après [Gab71]).

### 3.2 Modélisation de la restitution optique

La diffraction d'une onde plane par un plan de transmittance<sup>5</sup>  $\underline{t}$  peut être modélisée par l'intégrale de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld, valide sous les hypothèses de la théorie scalaire de la diffraction [Goo96, Fou03]. Cette intégrale traduit le principe de Huygens-Fresnel ([Goo96] p. 52) : l'onde diffractée à la distance  $z$  est exprimée comme la somme d'une infinité d'ondes secondaires sphériques d'amplitude proportionnelle à la transmittance  $\underline{t}(\xi, \eta)$  :

$$\underline{A}_z(x, y) = \frac{A_0}{j\lambda} \iint \underline{t}(\xi, \eta) \frac{e^{jkr}}{r} \cos(\theta) d\xi d\eta \quad (1.1)$$

où  $r$  désigne la distance entre la source secondaire située en  $(\xi, \eta, 0)$  et le point d'observation de coordonnées  $(x, y, z)$  ; et  $\cos \theta$  représente le facteur d'obliquité ( $\tan \theta = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} / z$ ). L'onde incidente est caractérisée par son amplitude complexe  $A_0$  et sa longueur d'onde  $\lambda$  (ou son nombre d'onde  $k = 2\pi/\lambda$ ).

Dans le cadre de l'holographie en ligne, la distance  $z$  est très supérieure à la fois à l'étendue du capteur et à la taille des objets étudiés. On peut alors (approximation de Fresnel) approximer l'équation 1.1 par le produit de convolution 2D  $*$  suivant [Goo96, Fou03] :

$$\underline{A}_z(x, y) = \underline{A}_0 e^{jkz} \underline{t} \underset{(x,y)}{*} \underline{h}_z, \quad (1.2)$$

avec le noyau de convolution  $\underline{h}_z$ , appelé “fonction de Fresnel” :

$$\underline{h}_z(x, y) = \frac{1}{j\lambda z} \exp \left( j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right). \quad (1.3)$$

Nous utilisons la notation compacte suivante pour désigner le produit de convolution  $c = a * b$  entre les fonctions  $a$  et  $b$ , évalué au point  $(x, y)$  :

$$\begin{aligned} c(x, y) &= \iint_{\mathbb{R}^2} a(u, v) \cdot b(x - u, y - v) du dv \\ &\equiv a \underset{(x,y)}{*} b \end{aligned}$$

dans laquelle les variables muettes d'intégration  $u$  et  $v$  ne sont pas explicitement représentées.

L'équation 1.2 permet de simuler la diffraction de l'onde de référence sur l'hologramme et ainsi de réaliser une *restitution numérique* de l'hologramme. La mise au point sur un plan quelconque situé à la distance  $z_r$  est obtenue en adaptant le noyau de convolution en  $\underline{h}_{z_r}$ .

### 3.3 Transformée de Fresnel : propriétés, implémentation

La convolution 2D par le noyau (complexe)  $\underline{h}_z$  est appelée *transformée de Fresnel* de paramètre  $\lambda z$ . La transformée de Fresnel est une transformation d'échelle [OK95], tout

<sup>5</sup>une table des notations les plus utilisées dans le manuscrit est présentée en page xi

comme le phénomène de diffraction qu'elle modélise. En effet, la relation qui lie deux hologrammes d'une même scène pris à des distances  $z_1$  et  $z_2$  différentes est une dilatation des systèmes de franges d'interférence d'un facteur  $z_2/z_1$ .

### 3.3.1 Propriétés

La transformée de Fresnel possède de très bonnes propriétés qui peuvent être mises en correspondance avec son interprétation comme diffraction lumineuse :

**Propriété de dualité** La transformation qui inverse la transformée de Fresnel de paramètre  $\lambda z$  est la transformée de Fresnel de paramètre  $-\lambda z$  :

$$\underline{h_z} * \underline{h_z}^* = \underline{h_z} * \underline{h_{-z}} = \delta \quad (1.4)$$

Cette propriété exprime le principe de retour inverse de la lumière.

**Propriété d'additivité** La composition de transformées de Fresnel de paramètres  $\lambda z_1$  et  $\lambda z_2$  peut se simplifier en une transformée de paramètre  $\lambda(z_1 + z_2)$  :

$$\underline{h_{z_1}} * \underline{h_{z_2}} = \underline{h_{z_1+z_2}} \quad (1.5)$$

Cette propriété exprime le principe de Huygens-Fresnel qui décrit la diffraction à la distance  $z_1 + z_2$  comme le résultat des interférences à une distance  $z_2$  entre une infinité d'ondes secondaires sphériques issues du front de l'onde diffractée dans le plan  $z = z_1$ .

**Élément neutre** La transformée de Fresnel laisse inchangée une fonction constante :

$$\underline{h_z}(x, y) * \underline{A_0} = \underline{A_0} \quad (1.6)$$

Cette propriété traduit le fait qu'une onde plane reste plane et de même amplitude par propagation.

Il est intéressant de noter que la transformée de Fresnel est entièrement redondante. Toute l'information est contenue dans l'amplitude complexe de l'onde diffractée à une distance donnée. Cette propriété de redondance totale n'est cependant obtenue que dans l'hypothèse de capteurs idéaux (étendue infinie des capteurs, échantillonnage idéal : taille du pixel nulle et nombre infini de pixels). Dans la pratique, cette forte redondance n'est pas totale.

### 3.3.2 Implémentation

Deux points importants sont à considérer lors de l'implémentation de la transformée de Fresnel : l'échantillonnage de la fonction de Fresnel, et la séparabilité du noyau :



**Échantillonnage :** La fonction de Fresnel peut soit être calculée dans l'espace direct, soit dans l'espace de Fourier. Les conditions d'échantillonnage de Shannon des deux expressions analytiques diffèrent (tableau 1.1), en fonction du paramètre  $\lambda z$  on préférera donc une définition dans l'espace direct ou dans l'espace de Fourier. Selon la taille du capteur  $L$  et le nombre  $N$  de pixels sur une ligne, une fenêtre de pondération anti-repliement doit être utilisée.

	Espace direct	Espace de Fourier
<b>Définition</b>	$\underline{h_z}(x, y) = \frac{1}{j\lambda z} e^{j\pi \frac{x^2+y^2}{\lambda z}}$	$\mathcal{F}[\underline{h_z}](u, v) = e^{-j\pi \lambda z(u^2+v^2)}$
<b>Fréquence instantanée<sup>†</sup></b>	$\frac{r}{2\lambda z}$	$\frac{1}{2}\rho\lambda z$
<b>Fréquence instantanée max.</b>	$\frac{\sqrt{2}L}{2\lambda z}$	$\lambda z \frac{\sqrt{2}N}{2L}$
<b>Fréquence d'échantillonnage</b>	$\frac{N}{L}$	$L$
<b>Condition de Shannon</b>	$z > \frac{\sqrt{2}L^2}{N\lambda}$	$z < \frac{\sqrt{2}L^2}{2N\lambda}$

<sup>†</sup>en notant  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ .

**Tab. 1.1** — Conditions d'échantillonnage des expressions analytiques de la fonction de Fresnel.

**Séparabilité du noyau :** Le noyau de convolution possède la propriété remarquable d'être séparable. Le calcul, bien que mené par transformée de Fourier elle même séparable, peut être rendu significativement plus efficace en tirant parti de cette propriété. Un calcul basé sur la séparabilité de la transformée de Fresnel ne nécessite de prolonger que des signaux 1D, ce qui permet de réaliser l'économie d'une allocation mémoire égale à 4 fois la taille de l'hologramme. De plus, la fonction de Fresnel, à symétrie de révolution, ne doit être évaluée que sur un profil 1D. Ainsi, par rapport à une implémentation non séparable, la transformée de Fresnel est effectuée avec un gain approximatif de 8 sur le temps d'exécution (hologramme  $1024 \times 1024$ , transformées de Fourier réalisées avec la bibliothèque FFTW).

### 3.4 Restitution numérique

La restitution numérique est réalisée par application de l'équation 1.2 en plusieurs étapes :

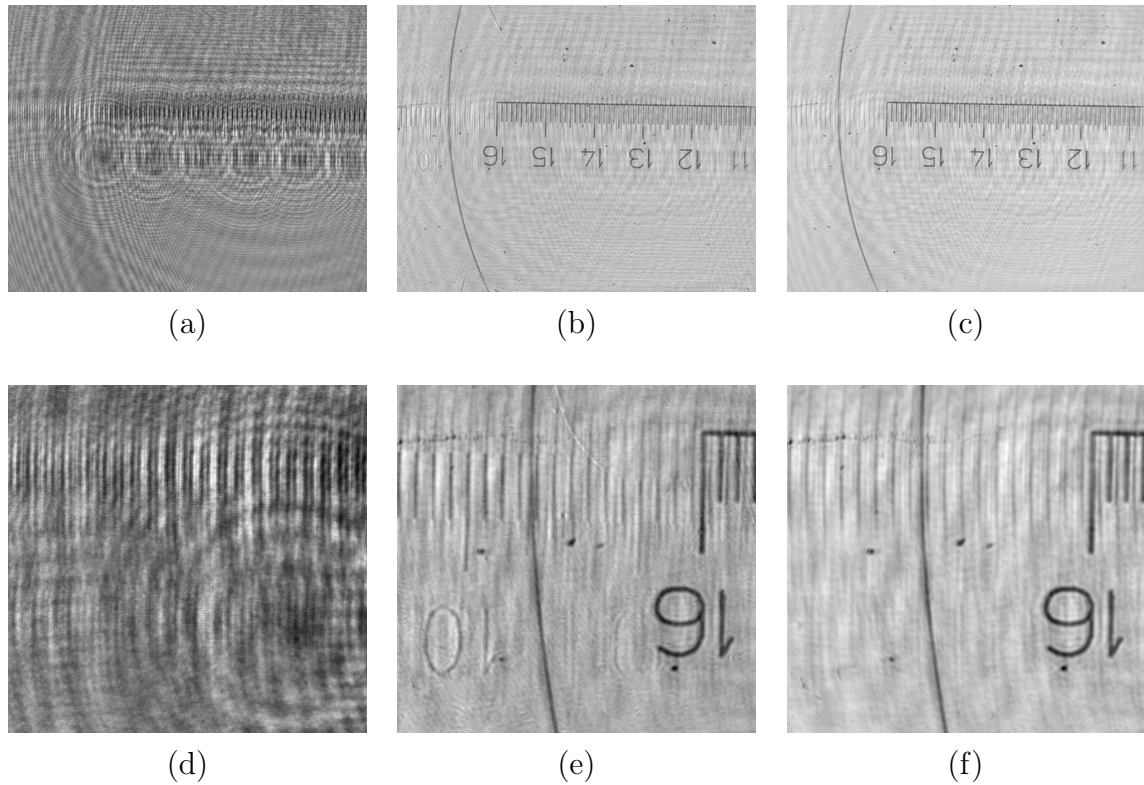
- Correction des franges d'interférences non désirées dues aux objets hors du volume d'étude (défauts sur le système de collimation, poussières présentes très près du capteur) : une soustraction d'image réalisée entre l'hologramme enregistré avec les objets étudiés et l'hologramme sans les objets (i.e. hologramme de fond) permet de supprimer leur influence.

- Correction des dérives d'éclairement (intensité) de l'onde de référence : la soustraction de l'hologramme de fond permet de s'en affranchir partiellement sur l'hologramme. Une image filtrée passe-bas de l'hologramme de fond peut être calculée afin d'amplifier les régions de l'hologramme ayant reçu moins d'énergie (portion moins contrastée des anneaux d'interférence).
- Correction du front d'onde de référence par multiplication : dans le cas d'une onde de référence présentant des aberrations de phase par rapport à l'onde plane (onde légèrement divergente par exemple), l'hologramme est pré-multiplié par un terme correctif[SM00]. Ce terme est calculé par évaluation de l'amplitude complexe du modèle de l'onde de référence dans le plan de l'hologramme. Cette correction agit comme une lentille corrective placée contre l'hologramme et modifiant la propagation de la lumière lors de la restitution numérique. Il s'agit de l'application de la démarche de Gabor décrite dans le paragraphe 3.1.2.
- Restitution proprement dite : simulation de la diffraction de l'hologramme par transformée de Fresnel. Cette étape consiste en une convolution discrète 2D, pouvant être réalisée dans l'espace de Fourier grâce aux algorithmes rapides (FFT). Des convolutions *circulaires* sont alors effectuées, ce qui rend indispensable d'augmenter le support de l'hologramme (zero-padding) afin de ne pas faire apparaître d'artefact dû à la périodisation : figure 1.4. Notons que ce prolongement de l'hologramme ne doit pas introduire de discontinuité. Dans le cas d'objets de taille importante par rapport à la taille de l'hologramme, une technique a été proposée pour minimiser les effets de discontinuité [DMYL02]. Dans le cadre de l'étude de micro-objets, il semble que le meilleur<sup>6</sup> prolongement consiste à répéter la valeur moyenne de l'hologramme en dehors de son support.
- Correction des dérives d'éclairement (intensité) sur les plans restitués numériquement : l'hologramme de fond filtré passe-bas peut être utilisé pour réaliser une correction des plans restitués numériquement puisque il représente l'énergie reçue par les objets diffractants.

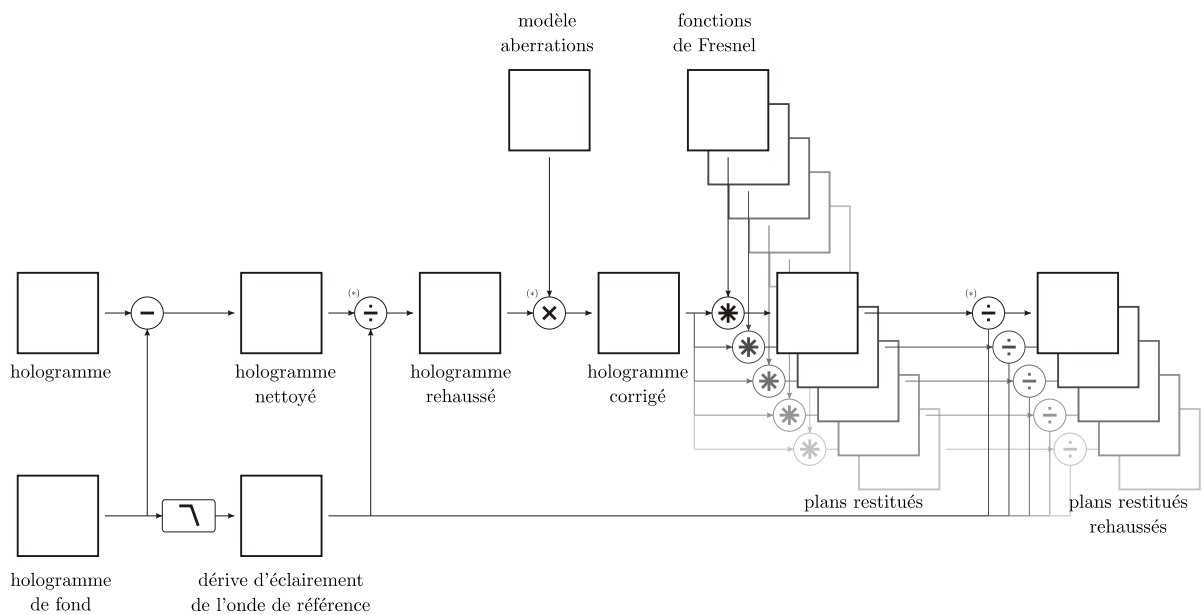
La restitution numérique, bien que calquée sur l'optique, présente de nombreux avantages par rapport au traitement optique de l'hologramme. Tout d'abord, les prétraitements que nous avons mentionnés permettent d'améliorer le rapport signal/bruit des plans restitués. La mise au point sur un plan particulier est réalisée en adaptant le noyau de convolution (focalisation numérique) alors que dans le cas d'un développement optique de l'hologramme, cette mise au point devait être réalisée optiquement, c'est à dire par déplacement mécanique. L'analyse optique d'un hologramme nécessitait donc un montage lourd et lent.

---

<sup>6</sup>effectivement, le prolongement idéal consisterait à compléter les franges manquantes, ce qui représente un problème équivalent à la reconstruction de l'ensemble des objets diffractants...



**Fig. 1.4** — Effet de périodisation lors de la restitution numérique : (a) et (d) hologramme de départ et zoom sur la région de gauche respectivement ; (b) et (e) restitution réalisée sans 0-padding ; (c) et (f) restitution avec 0-padding (doublement de la taille de l'image). La restitution sans 0 padding (b) et (e) fait apparaître par périodicité le nombre 10.



**Fig. 1.5** — Principe de restitution numérique. Les différents traitements correctifs possibles sont représentés. Les étapes marquées d'une astérisque sont facultatives.

## 4 Interprétation de la problématique de restitution numérique

Si la plupart des auteurs se limitent à simuler numériquement la restitution optique des hologrammes[PYJ06], d'autres approches sont toutefois possibles. Nous proposons dans cette partie de décrire l'hologramme et le problème de restitution à la lumière du traitement du signal, du traitement de l'image et de la modélisation probabiliste des images. Le modèle de formation de l'hologramme est tout d'abord introduit afin de décrire le codage de l'information (taille, forme, position 3D des micro-objets) dans l'hologramme. Nous décrivons ensuite les approches possibles (analyse, détection optimale, problème inverse).

### 4.1 Modélisation de la formation d'un hologramme

Les hologrammes sont des images très différentes de celles habituellement étudiées dans le domaine du traitement de l'image. La mise en œuvre d'outils adaptés nécessite par conséquent une modélisation d'une image-hologramme en lien avec les objets lui donnant naissance.

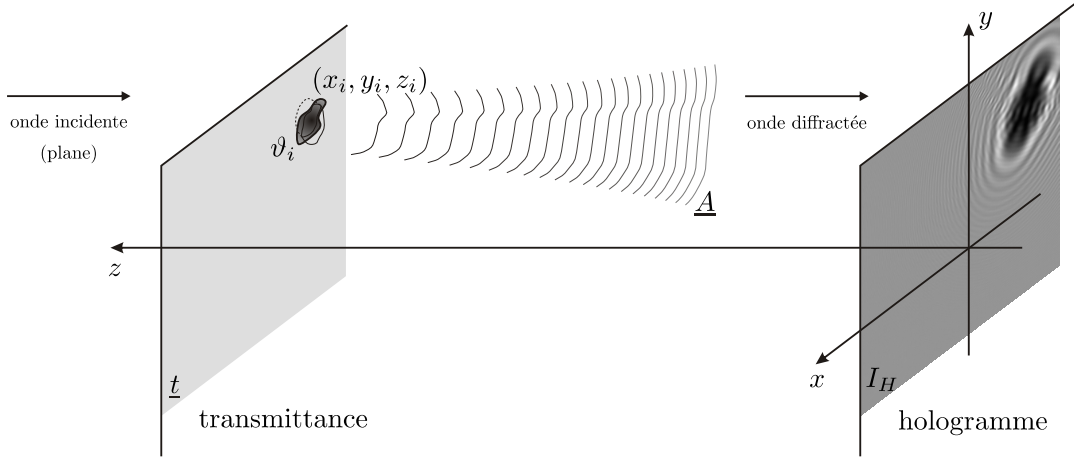
Nous avons utilisé dans le paragraphe 3.2 un modèle de la diffraction en champ lointain d'une ouverture : la transformée de Fresnel. Lors de la formation de l'hologramme, l'onde incidente est diffractée par les micro-objets qu'elle rencontre. L'intensité de l'onde diffractée mesurée sur le capteur est par définition l'hologramme de Gabor des objets. Nous établissons dans les paragraphes suivants l'expression de l'onde diffractée par un micro-objet, puis par l'ensemble des objets et nous en déduisons l'expression de l'intensité de l'hologramme. Des développements similaires ont été réalisés dans [TT76, OS87, CLz02, RS03, Fou03].

**Onde diffractée par un micro-objet** Si la dimension axiale du micro-objet  $i$  est du même ordre que ses dimensions transversales, l'objet peut-être approximé par sa transmittance dans un plan transversal médian. Seule sa projection orthogonale dans ce plan est alors considérée pour exprimer l'onde diffractée. Pour des objets microscopiques les conditions d'application de l'approximation de Fresnel sont vérifiées (taille  $\gg \lambda$  et taille  $\ll z$ ). L'onde plane incidente est diffractée par le plan de transmittance  $\underline{t}$  et donne naissance à l'onde diffractée  $\underline{A_z}$  dont l'expression est donnée par l'équation 1.2 (voir figure 1.6). Si l'on remplace la transmittance par l'expression (réelle) de l'ouverture du micro-objet  $\vartheta_i$  centrée en  $(x_i, y_i)$ , reliée à la transmittance par  $\delta_{x_i, y_i} * \vartheta_i = 1 - \underline{t}$ , on obtient l'expression suivante de l'amplitude diffractée dans le plan de l'hologramme<sup>7</sup> :

$$\underline{A_{z_i}}(x, y) = \underline{A_0} \left( 1 - \delta_{x_i, y_i} *_{(x, y)} \vartheta_i *_{(x, y)} \underline{h_z} \right), \quad (1.7)$$

où  $\delta_{x_i, y_i}$  représente la distribution de Dirac centrée en  $(x_i, y_i)$ .

<sup>7</sup>en prenant la référence des phases dans le plan de l'hologramme, le terme de phase  $e^{jkz}$  n'est pas à expliciter.



**Fig. 1.6** — Diffraction d'une onde plane par un micro-objet : représentation de l'objet par son plan de transmittance  $\underline{t}$  ; amplitude diffractée  $\underline{A}$  et hologramme enregistré  $I_H$ .

**Onde diffractée par un ensemble d'objets** Dans le cas d'un volume peu concentré contenant  $N$  objets, et sous l'hypothèse d'objets microscopiques (taille transversale très inférieure à la dimension de l'hologramme enregistré), l'onde incidente sur chaque objet peut être considérée comme étant quasi-plane. L'amplitude complexe de l'onde diffractée par le volume peut alors s'approximer comme la somme :

$$\underline{A}_H(x, y) = \underline{A}_0 \left( 1 - \sum_{i=1}^N \delta_{x_i, y_i} \underset{(x, y)}{*} \vartheta_i \underset{(x, y)}{*} \underline{h_{z_i}} \right). \quad (1.8)$$

Cette expression traduit la propriété d'additivité des amplitudes complexes en optique cohérente.

**Modèles de l'hologramme** Le capteur n'est sensible qu'à l'intensité de l'onde diffractée dans le plan de l'hologramme. Elle est proportionnelle au module au carré de l'amplitude complexe [Goo96] :  $I_H(x, y) \propto |\underline{A}_H(x, y)|^2$ . En introduisant l'expression (1.8), on obtient la formulation de l'intensité de l'hologramme :

$$\begin{aligned} I_H(x, y) &\propto \left| 1 - \sum_{i=1}^N \delta_{x_i, y_i} \underset{(x, y)}{*} \vartheta_i \underset{(x, y)}{*} \underline{h_{z_i}} \right|^2 \\ &\propto 1 - 2 \sum_{i=1}^N \delta_{x_i, y_i} \underset{(x, y)}{*} \vartheta_i \underset{(x, y)}{*} \operatorname{Re}(\underline{h_{z_i}}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \delta_{x_i, y_i} \underset{(x, y)}{*} \vartheta_i \underset{(x, y)}{*} \underline{h_{z_i}} \right) \times \left( \delta_{x_j, y_j} \underset{(x, y)}{*} \vartheta_j \underset{(x, y)}{*} \underline{h_{z_j}}^* \right). \end{aligned} \quad (1.9)$$

L'intensité de l'hologramme se compose ainsi de trois termes :

- un terme constant que l'on peut interpréter comme l'onde de référence du montage holographique ;

- la somme (incohérente) des intensités des figures de diffraction de chaque objet ;
- un terme représentant les interférences entre les figures de diffraction ( $i \neq j$ ) ainsi que la partie non-linéaire de la figure de diffraction de chaque particule ( $i = j$ ).

Dans le cadre de l'holographie numérique en ligne, le dernier terme peut être négligé. Pour que l'hologramme soit exploitable, il faut que la densité d'objets soit suffisamment faible (voir paragraphe 5), c'est à dire que l'approximation suivante doit être valide :

$$I_H(x, y) \propto 1 - 2 \sum_{i=1}^N \delta_{x_i, y_i} \underset{(x, y)}{*} \vartheta_i \underset{(x, y)}{*} \mathbb{R}e \left( \underline{h_{z_i}} \right). \quad (1.10)$$

Cette expression constitue le modèle additif de formation de l'hologramme. Les intensités des figures de diffraction sont considérées comme s'additionnant (sommation incohérente), le modèle obtenu est ainsi *linéaire*.

Si les objets sont de petite taille, le produit de convolution  $\vartheta_i \underset{(x, y)}{*} \mathbb{R}e(\underline{h_{z_i}})$  peut être approximé par un produit, donnant le modèle simplifié suivant[TT76] :

$$I_H(x, y) \propto 1 - 2 \sum_{i=1}^N \delta_{x_i, y_i} \underset{(x, y)}{*} \left[ \mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}} [\vartheta_i] \times \mathbb{R}e \left( \underline{h_{z_i}}(x, y) \right) \right], \quad (1.11)$$

où  $\mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}}$  désigne la transformée de Fourier évaluée en  $(\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z})$ .

**Interprétation en terme de modèle aléatoire** Plusieurs modèles aléatoires d'images ont été proposés [Jeu00] pour décrire les images et remonter à des propriétés statistiques sur la structure physique imagée. Dans le cas d'hologrammes d'un nombre important d'objets, certains outils de la modélisation aléatoire fournissent une approche originale d'analyse. Le modèle adapté à une formation additive d'image est la fonction aléatoire de dilution ([Ser68, Jeu92]). L'image est alors considérée comme étant une réalisation d'une fonction s'exprimant comme la somme de fonctions primaires (les figures de diffraction) implantées aux positions transversales  $x_i, y_i$  des objets. Le chapitre 4 décrit deux applications du modèle aléatoire de l'hologramme pour l'extraction de paramètres statistiques propres aux objets.

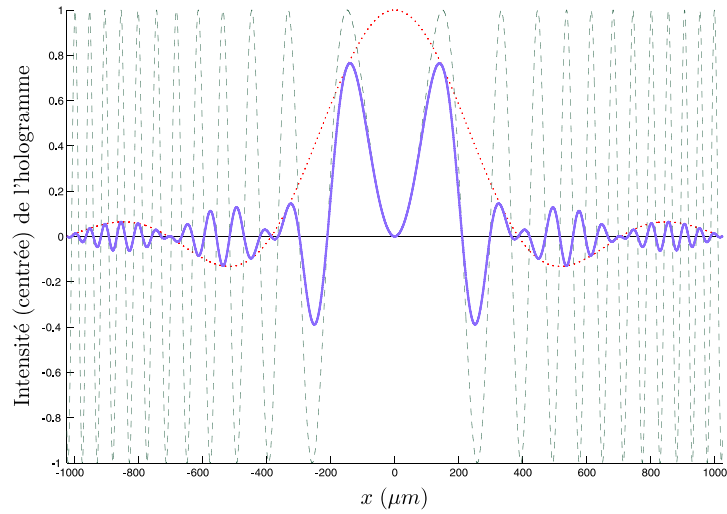
## 4.2 Codage de l'information sur l'hologramme

Les modèles de formation de l'hologramme décrits dans le paragraphe précédent permettent de décrire le codage de l'information relative aux objets dans l'hologramme. L'équation (1.11) est particulièrement intéressante pour identifier le codage des différents paramètres relatifs aux objets. Elle fait apparaître deux modulations (fig. 1.7) :

- une modulation d'amplitude, contrôlée par le terme  $\mathcal{F}_{\frac{x}{\lambda z}, \frac{y}{\lambda z}} [\vartheta_i]$  et codant par conséquent la forme de l'ouverture de l'objet ;
- une modulation linéaire de fréquence : *chirp linéaire*, générée par le terme  $\mathbb{R}e(\underline{h_{z_i}}(x, y))$ , codant le produit  $\lambda z_i$ , donc la distance axiale  $z_i$  entre l'objet et l'hologramme.

Le terme de modulation d'amplitude met en évidence une propriété caractéristique des hologrammes : le signal relatif à un objet donné est fortement délocalisé. La conséquence directe de cette propriété est la superposition des motifs de diffraction des différents objets, rendant difficile leur détection (voir section 5). Enfin, la position du motif de diffraction d'un objet code sa position transversale  $(x_i, y_i)$ .

L'hologramme est donc une image 2D contenant l'information relative à la forme (2D) et à la position 3D des micro-objets holographiés. L'analyse de ce type d'image nécessite une démodulation (amplitude et fréquence) et une localisation des motifs. La superposition des réponses liées aux différents objets complique cette tâche.



**Fig. 1.7** — Le profil de ligne d'un hologramme de gouttelette (courbe épaisse bleue) fait apparaître deux modulations : modulation d'amplitude (courbe en points rouges), et modulation de fréquence (courbe en tirets verts).

L'analyse de signaux contenant des “*chirps*” est un problème apparaissant dans de très nombreux cas pratiques. Éric Chassande-Mottin et Patrick Flandrin citent dans [CMF99] de nombreux autres domaines dans lesquels apparaissent des chirps : communication animale (oiseaux, grenouilles, baleines), écho-localisation (chauves-souris), géophysique (“whistlers” atmosphériques), astrophysique (onde gravitationnelles), acoustique, biologie (signaux EEG) ; ainsi que dans de nombreux systèmes conçus par l'homme (radar, sonar, contrôle non destructif, exploration sismique, ...). Cette profusion de contextes différents donnant naissance à des chirps est une motivation pour interpréter le problème d'analyse d'un hologramme dans un contexte plus large que celui de la restitution calquée sur l'optique. Nous décrivons dans les paragraphes suivants plusieurs approches possibles pour le traitement des hologrammes.

### 4.3 Approche filtrage et détection optimale

La restitution numérique basée sur une simulation de la restitution optique est une convolution par la fonction de Fresnel. Elle peut donc s'interpréter comme un filtrage. La

fonction de Fresnel correspond alors à la réponse impulsionnelle du filtre de restitution.

Le problème de restitution numérique est un problème de *compression de signal*<sup>8</sup> dans le sens où le signal enregistré sur l'hologramme est très délocalisé alors que dans les plans restitués les chirps sont compressés sous la forme d'impulsions correspondant aux images focalisées des objets. Ce problème de compression de signal peut être appréhendé dans le cadre d'une approche de filtrage. Le filtre utilisé classiquement pour réaliser la compression est alors le filtre adapté.

Le *filtre adapté* à un signal est le filtre maximisant le rapport signal sur bruit, lorsque le signal est perturbé par un bruit additif blanc. Il correspond à une corrélation par le signal non bruité. Dans le cadre de la restitution en holographie numérique, si les objets holographiés ne sont pas connus, le seul modèle possible pour le signal est le "chirp". Le filtrage adapté correspondant est donc la corrélation de l'hologramme par un "chirp". C'est exactement l'opération réalisée en simulant la diffraction de l'hologramme (équation 1.2) car la fonction de Fresnel est symétrique (convolution et corrélation sont alors équivalentes). Ceci justifie *a posteriori* la robustesse constatée de la restitution optique ou numérique d'un hologramme : un hologramme, même corrompu par du bruit basse ou haute fréquence, donne une image restituée avec un rapport signal/bruit important car la restitution correspond à un filtrage adapté. Si un modèle *a priori* de l'ouverture des micro-objets est connu (hologrammes de gouttelettes monodispersées en taille) par exemple, alors le filtrage adapté consiste en une corrélation de l'hologramme avec le modèle. Cette approche est développée dans le chapitre 3.

La formulation de modèles de formation de l'hologramme dans la section 4.1 nous a permis de relier les ouvertures des objets et l'intensité de l'hologramme par le biais d'un système linéaire (équation 1.10). Restituer les objets – c'est à dire retrouver leurs ouvertures  $\vartheta_i$  – revient donc à filtrer par le filtre inverse du système. Cette piste est décrite en partie dans le chapitre 2 et est à relier à l'approche "problème inverse" plus générale (paragraphe 4.5).

## 4.4 Approches d'analyse

La transformée de Fresnel joue un rôle clef en holographie. Elle apparaît à la fois dans les modèles de formation de l'hologramme (section 4.1) et dans le principe de restitution (section 3.2). Nous avons précisé dans le paragraphe 3.3 que cette transformée est une transformation d'échelle redondante. De nombreux travaux ont été menés sur la recherche de transformations permettant l'analyse des hologrammes.

Il est remarquable que le phénomène physique de diffraction, apparaissant lorsqu'une onde (acoustique, électromagnétique, flux d'électrons) rencontre un obstacle à sa propagation libre, peut être modélisé par de nombreuses transformations :

- transformée de Fourier (diffraction de Fraunhofer),
- transformée de Fresnel : transformation d'échelle,
- transformée de Fourier fractionnaire,

---

<sup>8</sup>le vocabulaire utilisé fait appel à l'analogie avec la compression de "chirps" en radar



- transformée en ondelettes continue,
- transformée en ondelettes discrète.

Nous discutons ici de l'utilisation de la transformée de Fourier fractionnaire, puis des analyses en ondelettes continue ou discrète.

**La transformée de Fourier fractionnaire** La transformée de Fourier fractionnaire, introduite par Namias en 1980 [Nam80], a fait couler beaucoup d'encre ces 10 dernières années. Plusieurs auteurs proposent de l'utiliser pour traiter les hologrammes numériques [CLC02, CLz02, ZPOT04a]. Nous dressons ici un bilan des différentes approches et de l'apport essentiellement théorique de cette transformée pour l'holographie numérique.

**Définition mathématique** Dans la référence [OBMO94], les auteurs introduisent la transformée de Fourier fractionnaire très naturellement par le biais des fonctions propres de l'opérateur de transformée de Fourier. L'équation différentielle suivante :

$$f''(x) + 4\pi^2 ((2n+1)/2\pi - x^2) f(x) = 0$$

est également vérifiée par les transformées de Fourier de  $f$  :

$$\mathcal{F}[f]''(\nu) + 4\pi^2 ((2n+1)/2\pi - \nu^2) \mathcal{F}[f](\nu) = 0$$

par application de la transformée de Fourier sur la première équation ( $\mathcal{F}[f]$  désignant la transformée de Fourier de  $f$ ). Les solutions de cette équation différentielle sont donc des fonctions propres de l'opérateur de Fourier. Ce sont les fonctions d'Hermite–Gauss dont l'expression normalisée s'écrit en fonction des polynômes de Hermite  $H_n$  :

$$\tilde{\Phi}_n(x) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\sqrt{2\pi}x) \exp(-\pi x^2).$$

Ces fonctions satisfont l'équation aux valeurs propres :

$$\mathcal{F}[\tilde{\Phi}_n(x)] = \lambda_n \tilde{\Phi}_n(x),$$

avec  $\lambda_n = j^{-n}$  la valeur propre associée à la  $n^{\text{ème}}$  fonction propre.

La transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $a$  réel peut se définir par son action sur les fonctions propres de la transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}^a[\tilde{\Phi}_n(x)] = \lambda_n^a \tilde{\Phi}_n(x).$$

Cette définition peut également s'exprimer sous la forme de la transformation linéaire de noyau  $B_a(x, x')$  suivante [OBMO94] :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^a[f](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} B_a(x, x') f(x') dx' \\ \text{avec } B_a(x, x') &= \frac{\exp[-j(\pi\hat{\phi}/4 - \phi/2)]}{|\sin \phi|^{1/2}} \\ &\quad \times \exp \left[ j\pi(x^2/\tan \phi - 2xx'/\sin \phi + x'^2/\tan \phi) \right] \\ \text{où } \phi &\equiv \frac{a\pi}{2} \\ \hat{\phi} &= \text{signe de } \sin \phi. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Lorsque  $a = 0$ ,  $B_a(x, x')$  est défini par  $B_a(x, x') = \delta(x - x')$  et  $\mathcal{F}^a$  correspond à l'identité ; lorsque  $a = \pm 2$ ,  $B_a(x, x') = \delta(x + x')$  et  $\mathcal{F}^a[f](x) = f(-x)$ .

#### Propriétés de la transformée de Fourier fractionnaire

- linéarité
- additivité :  $\mathcal{F}^{a_1} + \mathcal{F}^{a_2} = \mathcal{F}^{a_1+a_2}$
- valeurs remarquables :  $\mathcal{F}^0 = Id$ ;  $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$ ;  $\mathcal{F}^4 = Id$ .

D'autres propriétés sont décrites dans les références [Alm94, ALALA94, MO93].

**Détection optimale d'un chirp** Les liens forts de la transformée de Fourier fractionnaire avec la fonction de distribution de Wigner lui font jouer un rôle particulier en traitement du signal pour la détection de chirp. La figure 1.8 illustre les liens entre les différentes approches de détection optimale d'un chirp.

Le détecteur *optimal* d'un signal est défini relativement à un critère donné. La détection d'un signal  $s$  dans un signal mesuré (bruité)  $r$  peut être considérée dans le cadre d'un test binaire d'hypothèses : ( $H_0$ ) le signal mesuré ne contient que du bruit ; ( $H_1$ ) le signal mesuré contient le signal à détecter. Le test du rapport de vraisemblance  $\lambda(r) = p_1(r)/p_0(r)$  (où  $p_0(r)$  et  $p_1(r)$  désignent les densités de probabilité conditionnelles d'observer  $r$  sous  $H_0$  et  $H_1$  respectivement) fournit alors un critère fréquemment utilisé [KBB85, CMF99]. Sous l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien centré, maximiser le rapport de vraisemblance revient à maximiser la corrélation entre le signal mesuré  $r(x)$  et le modèle du signal à détecter  $s(x, \theta)$  (où  $\theta$  représente l'ensemble des paramètres du modèle) :

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} r(x) s(x; \theta)^* dx \right|^2. \quad (1.13)$$

L'expression (1.13), exprimée dans l'espace direct, peut également être écrite dans le domaine fréquentiel, par application de la formule de Parseval, ou dans le domaine temps-fréquence de Wigner-Ville, par application de la formule de Moyal [KBB85] :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_r(x, \omega) W_s(x, \omega; \theta) dx \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (1.14)$$

Cette dernière écriture est particulièrement intéressante pour la détection de chirps car contrairement aux représentations directe et fréquentielle, la distribution de Wigner localise parfaitement un chirp linéaire sous la forme d'une droite : si  $s(x) = \exp(j(\omega_0 x + 1/2 m x^2))$ , alors  $W_s(x, \omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0 - mx)$ . L'expression 1.14 s'écrit donc dans le cas de la détection d'un chirp<sup>9</sup> sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{\infty} W_r(x, \omega_0 + mx) dx. \quad (1.15)$$

L'expression 1.15 correspond à une projection de la distribution de Wigner  $W_r$  le long d'une droite. C'est par définition la transformée de Radon-Wigner de  $r$  évaluée en

<sup>9</sup>nous ne nous intéressons ici qu'aux chirps linéaires, sauf mention contraire, chirp désigne donc dans le texte un chirp linéaire

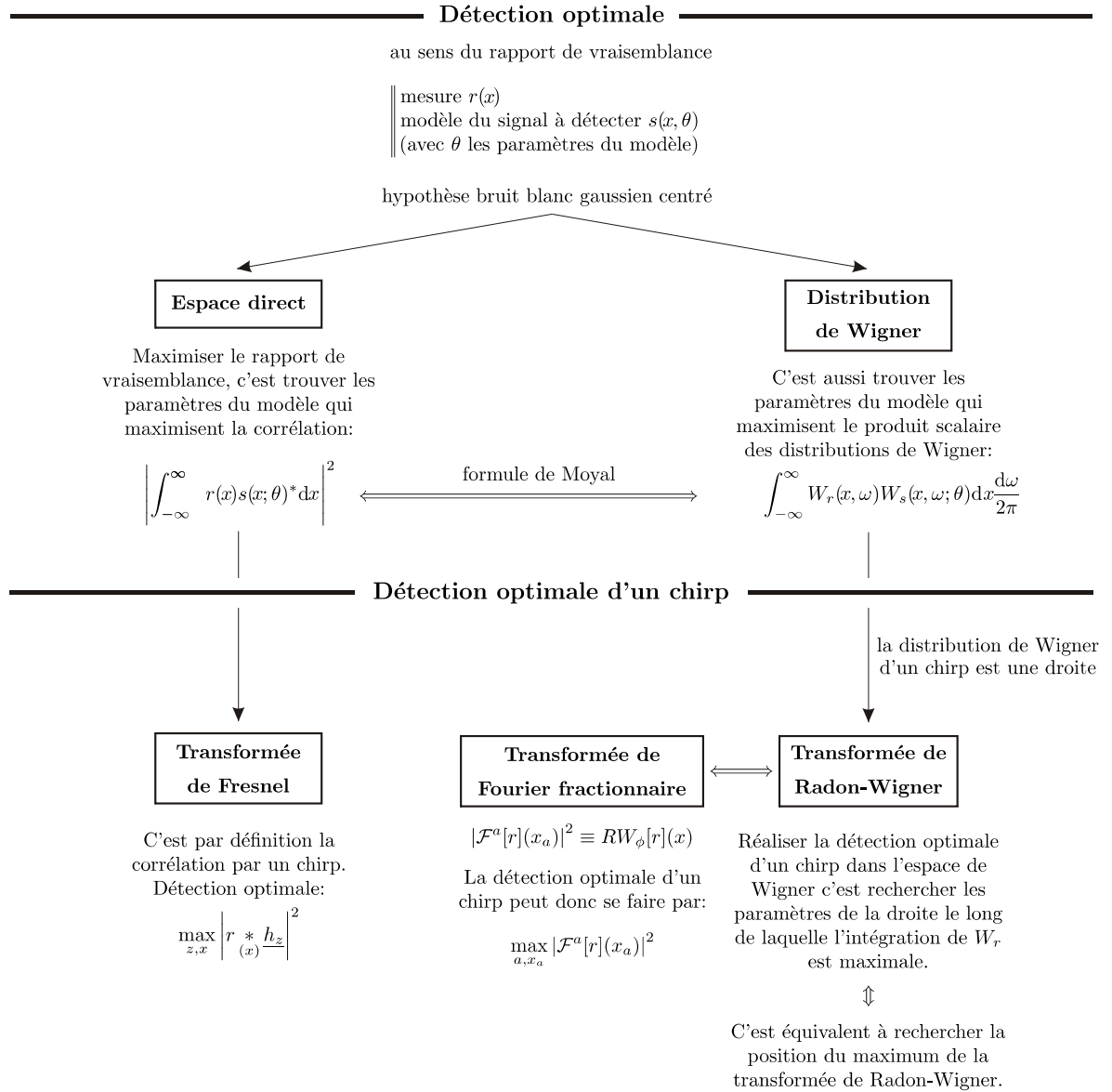


Fig. 1.8 — Lien entre les différentes approches de détection optimale d'un chirp

$(-\omega_0/\sqrt{m^2+1}, \arctan(-1/m))$  [WB94]. La détection optimale d'un chirp peut donc être réalisée en cherchant la position du maximum de la transformée de Radon-Wigner du signal  $r$ . La position trouvée donne les paramètres du modèle (le chirp) maximisant 1.14 et 1.13, c'est à dire maximisant le rapport de vraisemblance.

La transformée de Radon-Wigner peut être calculée simplement à partir de la transformée de Fourier fractionnaire de  $r$  grâce à l'égalité suivante, avec  $\phi = a\pi/2$  noté en paramètre, démontrée dans [LS94] :

$$|\mathcal{F}^a[r](x_a)|^2 = RW_\phi[r](x). \quad (1.16)$$

La détection optimale d'un chirp s'exprime alors comme la recherche de l'ordre fractionnaire et de la position maximisant le module au carré de la transformée de Fourier fractionnaire du signal :

$$\max_{a, x_a} |\mathcal{F}^a[r](x_a)|^2. \quad (1.17)$$

Si l'on exprime la détection optimale dans l'espace direct, l'expression 1.13 fait apparaître la transformée de Fresnel (corrélation avec un chirp). La détection optimale revient alors à balayer les distances  $z$  et à rechercher la position maximisant la corrélation :

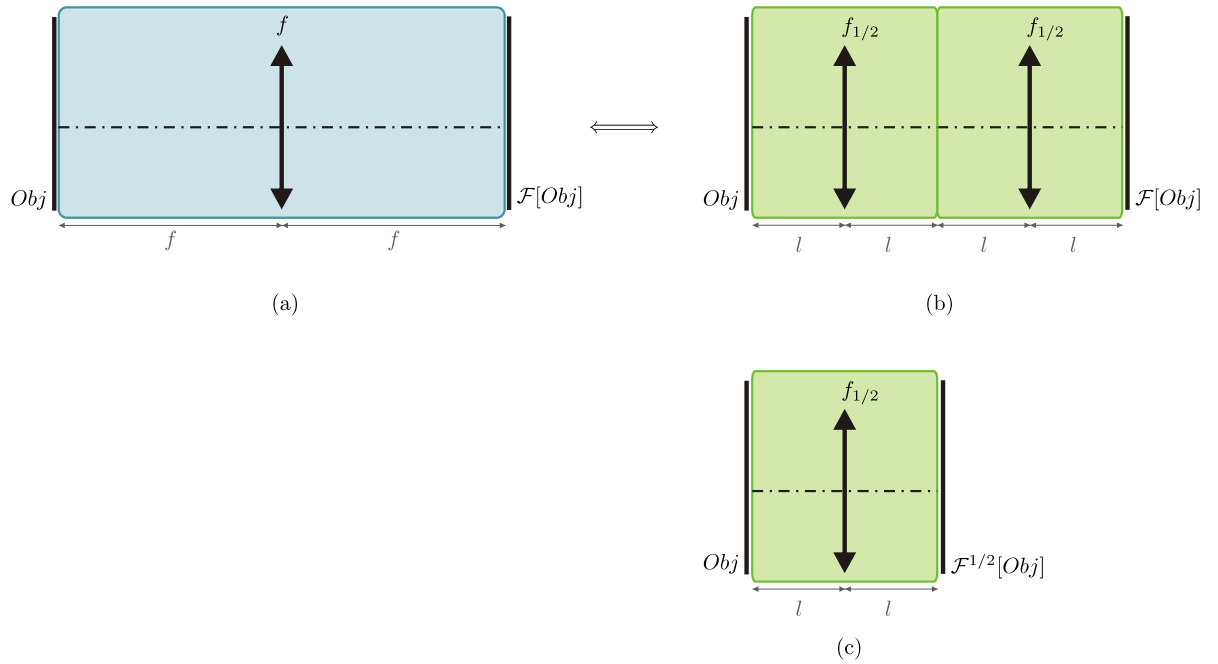
$$\max_{z, x} \left| r *_{(x)} \frac{h_z}{(x)} \right|^2. \quad (1.18)$$

*La transformée de Fresnel et la transformée de Fourier fractionnaire correspondent donc toutes les deux à des détecteurs optimaux de chirps, au sens du maximum du rapport de vraisemblance. L'équivalence entre les approches de détection optimale dans le plan de Wigner et par corrélation directe a été prouvée dans [Li87].*

**Interprétation optique de la transformée de Fourier fractionnaire** L'intérêt de la transformée de Fourier fractionnaire pour l'optique a été soulevé par Mendlovic et Ozaktas [MO93, OM93] en 1993. Ils introduisent une définition de la transformée de Fourier fractionnaire dans le cadre de l'optique de Fourier. Un des résultats les plus connus de l'optique de Fourier est qu'une lentille mince de focale  $f$  forme dans son plan focal image la transformée de Fourier d'un objet placé sous éclairage cohérent dans le plan focal objet (montage  $2f$ ) ([Goo96], page 104). Le montage correspondant, illustré en figure 1.9(a), peut également être réalisé à l'aide de deux lentilles cascades comme illustré en figure 1.9(b). La focale  $f_{1/2}$  ainsi que la distance  $l$  doivent respecter les relations suivantes les liant à la focale  $f$  du système de départ [MO93] :

$$\begin{aligned} f_{1/2} &= f / \sin(\pi/4), \\ l &= f \tan(\pi/8). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Les montages figure 1.9(a) et 1.9(b) sont alors équivalents, c'est à dire qu'ils réalisent tous deux la transformée de Fourier de l'objet placé en entrée et éclairé par une onde plane (cohérente). A la sortie d'un des blocs  $f_{1/2}$ , on obtient alors la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $1/2$  : figure 1.9(c). En définissant des paramètres  $f$  et  $l$  adéquats,



**Fig. 1.9** — Réalisation optique de la transformée de Fourier fractionnaire  $\mathcal{F}^{1/2}$  : (a) montage  $2f$  classique réalisant la transformée de Fourier de l'objet présenté en entrée ; (b) montage équivalent composé de deux blocs identiques ; (c) la sortie d'un des blocs est la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $1/2$  de l'objet présenté en entrée.

on peut facilement concevoir un bloc réalisant la transformée d'ordre fractionnaire  $1/Q$ , puis par mise en cascade de  $P$  blocs identiques, réaliser la transformée d'ordre  $P/Q$ .

Une implémentation optique plus simple à mettre en pratique consiste à utiliser des milieux à gradients d'indice. Un milieu dont l'indice varie comme le carré de la distance radiale (quadratic GRIN medium) focalise la lumière comme les blocs décrits précédemment. On peut associer à un tel milieu la longueur  $L$  au bout de laquelle un faisceau incident collimaté ressort focalisé. La propagation sur une distance  $aL$  correspond alors à la transformée de Fourier fractionnaire d'ordre  $a$ .

La transformée de Fourier fractionnaire modélise donc la propagation en champ libre et l'action d'une lentille. Le lien entre propagation en champ libre et transformée de Fourier fractionnaire a été étudié dans [ALALA94, PF94, OM95, MFGB00]. Il a notamment été montré que *la transformée de Fourier fractionnaire pouvait s'interpréter comme la transformation de l'amplitude d'une onde après propagation en champ libre, évaluée le long d'une surface sphérique*. Nous précisons ce lien dans le paragraphe suivant :

### L'analogie transformée de Fresnel – transformée de Fourier fractionnaire

Du point de vue traitement du signal comme du point de vue optique les transformées de Fresnel et de Fourier fractionnaire présentent des similarités importantes. Nous établissons ici formellement le lien entre les deux transformées et nous en déduisons une équivalence.

La transformée de Fresnel  $f * \underline{h}_z$  de la fonction  $f$  s'écrit par définition de la convo-

lution :

$$f \underset{(x,y)}{*} h_z = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \exp \left( j\pi \frac{(x-u)^2 + (y-v)^2}{\lambda z} \right) du dv, \quad (1.20)$$

ou en développant le noyau de convolution :

$$\begin{aligned} f \underset{(x,y)}{*} h_z &= \frac{1}{j\lambda z} \exp \left( j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right) \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \exp \left( j\pi \frac{u^2 + v^2}{\lambda z} \right) \exp \left( -2j\pi \frac{xu + yv}{\lambda z} \right) du dv. \end{aligned} \quad (1.21)$$

La transformée de Fresnel apparaît alors comme la transformée de Fourier de la fonction  $f$  prémultipliée par un terme quadratique de phase, à laquelle on applique un second terme quadratique de phase. Cette expression est notamment très proche de la définition de la transformée de Fourier fractionnaire 2D :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^a[f](x', y') &= \frac{\exp[-2j(\pi\hat{\phi}/4 - \phi/2)]}{|\sin \phi|} \exp \left( j\pi \frac{x'^2 + y'^2}{\tan \phi} \right) \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} f(u', v') \exp \left( j\pi \frac{u'^2 + v'^2}{\tan \phi} \right) \exp \left( -2j\pi \frac{x'u' + y'v'}{\sin \phi} \right) du' dv'. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Contrairement aux variables  $x, y, u$  et  $v$  de la transformée de Fresnel, les variables  $x', y', u'$  et  $v'$  sont adimensionnelles. Introduisons les changements de variables suivants définis pour  $\phi \in ]0, \pi/2]$  :  $u' = u/u_0$  et  $v' = v/v_0$  avec  $u_0^2 = v_0^2 = \lambda z / \tan \phi$  et  $x' = x/x_0$ ,  $y' = y/y_0$  avec  $x_0^2 = y_0^2 = 2\lambda z / \sin 2\phi$ . L'équation 1.22 devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^a[f]\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) &= \frac{\exp[-2j(\pi\hat{\phi}/4 - \phi/2)]}{|\sin \phi|} \exp \left( -j\pi \sin^2 \phi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right) \tan \phi \\ &\times \frac{1}{\lambda z} \exp \left( j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right) \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{u}{u_0}, \frac{v}{v_0}\right) \exp \left( j\pi \frac{u^2 + v^2}{\lambda z} \right) \exp \left( -2j\pi \frac{xu + yv}{\lambda z} \right) du dv, \end{aligned} \quad (1.23)$$

faisant apparaître l'expression de la transformée de Fresnel :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^a[f]\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) &= \frac{\exp[-2j(\pi\hat{\phi}/4 - \phi/2)]}{\cos \phi} \exp \left( -j\pi \sin^2 \phi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z} \right) \\ &\times f\left(\frac{u}{u_0}, \frac{v}{v_0}\right) \underset{(x,y)}{*} h_z(u, v). \end{aligned} \quad (1.24)$$

L'équation 1.24 établit la relation entre la transformée de Fourier fractionnaire et la transformée de Fresnel. Si  $a$  est choisi tel que  $\tan(a\pi/2)[u.l.]^2 = \lambda z$  (où  $[u.l.]^2$  désigne l'unité de surface), alors les deux transformations sont équivalentes, à un ré-échantillonnage linéaire près et à la multiplication par un terme quadratique de phase

et une constante près. Les auteurs appliquant la transformée de Fourier fractionnaire en holographie numérique [CLC02, CLz02, ZPOT04a] utilisent le module au carré  $|\mathcal{F}^a[f]|^2$ . On a alors, pour  $a$  choisi tel que les transformations soient équivalentes :

$$\left| \mathcal{F}^a[f]\left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}\right) \right|^2 = \frac{1}{\cos^2 \phi} \left| f(u, v) \underset{(x,y)}{*} \underline{h_z}(u, v) \right|^2, \quad (1.25)$$

c'est à dire qu'en intensité, les transformations sont équivalentes à un ré-échantillonnage près et au facteur multiplicatif  $1/\cos^2 \phi$  près.

*Si l'ordre fractionnaire  $a$  est choisi tel que  $\tan(a\pi/2)[u.l.]^2 = \lambda z$ , alors la transformée de Fourier fractionnaire est équivalente en intensité à la transformée de Fresnel, à un ré-échantillonnage près. En amplitude, les deux transformées sont égales à un terme quadratique de phase, un facteur de proportionnalité et un ré-échantillonnage près.*

Le facteur de ré-échantillonnage  $x_0 = y_0 = \sqrt{2\lambda z / \sin 2\phi}$  s'écrit, pour  $\tan(\phi)[u.l.]^2 = \lambda z$ , sous la forme :  $x_0 = y_0 = \sqrt{1[u.l.]^2 + (\lambda z)^2[u.l.]^{-2}}$ . Cette dernière expression tend vers  $1[u.l.]$  quand  $z$  tend vers 0, c'est à dire que les échantillonnages des transformées de Fresnel et de Fourier fractionnaire sont identiques à très faible distance. Par contre, pour  $z$  grand, le facteur de ré-échantillonnage devient grand, c'est à dire qu'à grande distance, la transformée de Fresnel d'une fonction  $f$  a un support beaucoup plus étendu que  $\mathcal{F}^a[f]$ . Si l'on prend la longueur d'onde comme unité de longueur  $[u.l.]$ , alors dans le cadre de l'holographie de Gabor,  $z$  est très grand et l'approximation  $x_0 = y_0 \approx z$  (où  $z$  est exprimé en nombre de longueur d'ondes) est valable. L'échantillonnage de la transformée de Fourier fractionnaire est donc *adapté à la distance  $z$* . C'est sans doute la propriété la plus intéressante en pratique de la transformée de Fourier fractionnaire. Cette propriété est atteinte au dépend d'une propriété souhaitable pour l'étude d'objets volumiques (ou répartis en volume) : la conservation d'un échantillonnage constant dans le volume. Cette contrainte pèse en faveur de la transformée de Fresnel pour la restitution d'un volume à partir d'un hologramme dans le cadre de l'étude de micro-objets répartis en volume. Notons qu'une discrétisation similaire à celle effectuée dans la transformée de Fourier fractionnaire discrète peut être réalisée pour la transformée de Fresnel. D'autres discrétisations sont également possibles, elles ont été étudiées en détail dans la référence [KAJ97].

En conclusion, bien que parfois présentée comme une approche différente de la transformée de Fresnel, la transformée de Fourier fractionnaire conduit à des résultats similaires. Son utilisation en holographie numérique pour l'étude de micro-objets est déconseillée car l'échantillonnage varie avec la profondeur de restitution. L'analogie forte entre les deux transformées permet d'interpréter la transformée de Fresnel comme une transformée plus "riche" qu'un simple modèle de diffraction. À une distance nulle, la transformée de Fresnel correspond à l'opérateur identité ; à l'infini, la transformée de Fresnel tend vers la transformée de Fourier : c'est la diffraction de Fraunhofer. On peut interpréter un hologramme comme résultat d'une rotation du plan espace-fréquence (de Wigner) associé à l'image de l'objet éclairé, propriété connue de la transformée de Fourier fractionnaire [LS94].

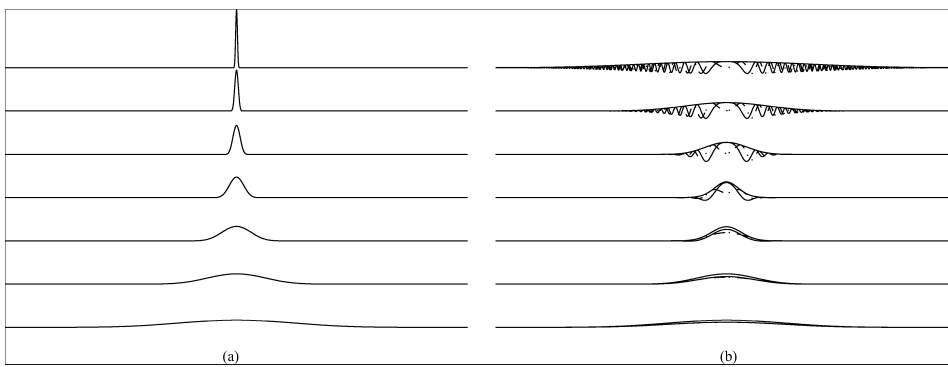
**Transformées en ondelettes** L'analogie entre la diffraction et les transformations en ondelettes a été mise en évidence par Onural [Onu93]. La transformée de Fresnel peut effectivement s'interpréter comme la convolution/corrélation avec une fonction de Fresnel mère  $h(x, y) = \exp[j(x^2 + y^2)]$  dilatée d'un facteur  $\sqrt{\lambda z/\pi}$ . La fonction mère ne vérifie cependant pas les conditions d'admissibilité des ondelettes. Elle doit être apodisée afin d'être localisée spatialement et fréquentiellement et être de moyenne nulle. La fonction mère ainsi modifiée[BLCLz00] :

$$\psi = (\sin(x^2 + y^2) - M_\psi) \exp(-\frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}), \quad (1.26)$$

où  $M_\psi = \sin(\arctan \sigma^2)/\sqrt{1 + \sigma^4}$ , permet de réaliser une analyse en ondelettes continue. La valeur de  $\sigma$  contrôlant l'apodisation doit être calculée pour vérifier les conditions d'échantillonnage et que le support l'ondelette soit contenu dans le support de l'image afin que la condition de valeur moyenne nulle reste vérifiée.

En pratique, l'analyse par ondelette continue d'un hologramme, bien que source potentielle d'inspiration pour appliquer de nouveaux traitements issus du domaine des ondelettes, souffre d'un inconvénient majeur : *le fenêtrage de la fonction de Fresnel conduit à une restitution sous-optimale*. Cette apodisation du chirp de la fonction de Fresnel atténue les hautes fréquences et conduit par conséquent à des images restituées filtrées passe-bas. Ce type d'analyse, bien que parfois utilisé dans la littérature pour restituer les hologrammes [BLO97, LBO99, BLCLz00, CBLLz01, MCAL03, MACL04], réduit donc la résolution par rapport à une restitution par transformée de Fresnel.

Une analyse multirésolution a été proposée par Liebling et al. [LBU03]. Il construit une famille d'ondelettes définies comme les transformées de Fresnel de B-Splines, qu'il nomme Fresnelets (figure 1.10). Il obtient ainsi directement, à une distance donnée, l'analyse



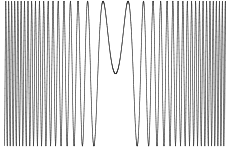
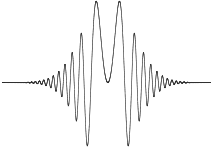
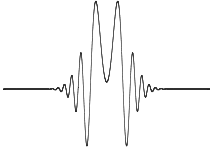
**Fig. 1.10** — Construction de la famille d'ondelettes pour l'analyse multirésolution : (a) B-splines ; (b) transformées de Fresnel des B-Splines, la partie réelle est représentée en trait continu, la partie imaginaire en pointillés et l'enveloppe est rajoutée en trait plein (figure extraite de [LBU03]).

multirésolution de l'image restituée. Cette analyse multirésolution a été appliquée en holographie hors axe à la séparation des ordres 0 et  $-1$  par filtrage des coefficients



en ondelettes [LBU04, LU05] et à la focalisation automatique [LU04] (recherche de la distance de restitution maximisant le module des coefficients en ondelettes). Dans le cadre de l'holographie en ligne, pour l'étude d'objets microscopiques répartis en volume, une analyse multirésolution des images restituées n'est pas forcément justifiée puisque l'objectif est alors d'obtenir une image avec la meilleure résolution possible. De plus, l'approche de filtrage de l'image jumelle ne peut pas être appliquée car il n'y a pas de séparation spatio-fréquentielle possible en holographie en ligne.

Le tableau 1.2 résume les caractéristiques des 3 techniques d'analyse : transformée de Fresnel, transformée en ondelettes continue, transformée en ondelettes discrète (Fresnelets). Le noyau de chaque transformation est représenté, mettant en évidence la limitation fréquentielle imposée par la contrainte de localisation des approches ondelettes. Les caractéristiques de chaque transformation sont rappelées ainsi que leur contexte d'application.

	Fresnel	Ondelettes continues	Ondelettes discrètes
<b>Noyau</b>			
<b>Définition</b>	Fonction de Fresnel	Fonction de Fresnel fenêtrée	Transformée de Fresnel d'une B-spline
<b>Propriétés</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– non localisée fréquentiellement</li> <li>– transformation d'échelle</li> <li>– redondance totale</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– localisée</li> <li>– propriétés d'ondelettes</li> <li>– redondance</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– localisée</li> <li>– analyse multirésolution</li> <li>– base orthogonale ou semi-orthogonale</li> </ul>
<b>Applications</b>	transformée classique	granulométrie, localisation	holographie hors axe : autofocus et filtrage des ordres 0 et -1

Tab. 1.2 — Transformations utilisées pour l'analyse d'un hologramme.

## 4.5 Approche “problème inverse”

Nous avons introduit dans la partie 4.1 des modèles de formation de l'hologramme permettant de calculer pour un objet ou un ensemble d'objets donnés la distribution d'intensité enregistrée sur le capteur. Ce calcul, simple, s'exprime dans le cadre du modèle de l'équation 1.10 comme une somme de produits de convolution. Le problème de restitution numérique, lui, nécessite de déconvoluer l'équation 1.10 pour obtenir l'amplitude des objets : c'est un problème inverse. De plus, les données (c'est à dire la distribution d'intensité dans le plan du capteur) sont tronquées : alors que la figure de diffraction est d'extension infinie — la fonction de Fresnel n'étant pas localisée — l'intensité n'est connue que sur un support limité.

La restitution, telle que nous l'avons présentée dans la section 3, ne réalise pas l'inversion exacte de l'équation 1.10. En effet, alors que l'inverse de la fonction de Fresnel existe :  $\underline{h_{-z}}$ , l'inverse de la partie réelle de la fonction de Fresnel n'est pas définie. La restitution classique consiste en une convolution par la partie réelle de la fonction de Fresnel, en effet  $\Re(\underline{h_z})$  est une approximation de son inverse :  $\Re(\underline{h_z}) * \Re(\underline{h_z}) = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\Re(h_{2z}) \approx \frac{1}{2}\delta$ . Cette approximation conduit à l'apparition d'une image dite "jumelle" (ou virtuelle) superposée à l'image focalisée des objets. Supprimer cet artefact nécessite par conséquent de trouver un meilleur inverse. Nous étudions ce problème dans le chapitre 2.

Le fait que les données soient tronquées rend problématiques les approches d'analyse car elles conduisent à transformer (ou en termes optiques, à propager) des signaux fenêtrés. Que l'hologramme soit considéré périodique ou que l'on prolonge le signal (0-padding, prolongement par continuité ou approche plus évoluée comme dans [DMYL02]), il apparaît toujours des artefacts dûs au support limité de l'hologramme. Formuler les différents problèmes posés en holographie numérique comme des problèmes inverses, c'est à dire exprimer ce que l'on cherche dans le plan de l'hologramme permet de s'affranchir de ces artefacts. Nous détaillons cette approche dans le chapitre 3.

## 4.6 Approche stéréologique

Nous avons conclu la partie 4.1 par une interprétation de l'hologramme comme la réalisation d'un modèle aléatoire de dilution. L'hologramme est une forme de projection des objets. Il ne s'agit pas d'une projection classique, comme en ombroscopie ou en tomographie X, cependant le problème de caractérisation statistique des objets 3D par l'intermédiaire de l'image-hologramme 2D est un problème de stéréologie. Nous proposons dans le chapitre 4 de remonter aux informations statistiques de taille et/ou d'orientation des micro-objets à partir de l'autocorrélation de l'hologramme.

# 5 Étude du bruit en holographie numérique en ligne

Les sources de bruit sont multiples en holographie numérique et très variées à la fois dans leur origine et dans leur amplitude. Nous décrivons dans les paragraphes suivants le bruit relatif au montage, puis le bruit dû à la caméra avant de décrire la part la plus importante du bruit : le bruit de modèle.

## 5.1 Bruit de montage

Le montage de Gabor utilisé en holographie de micro-objets, bien que très simple, peut générer à différents niveaux du bruit sur l'hologramme :

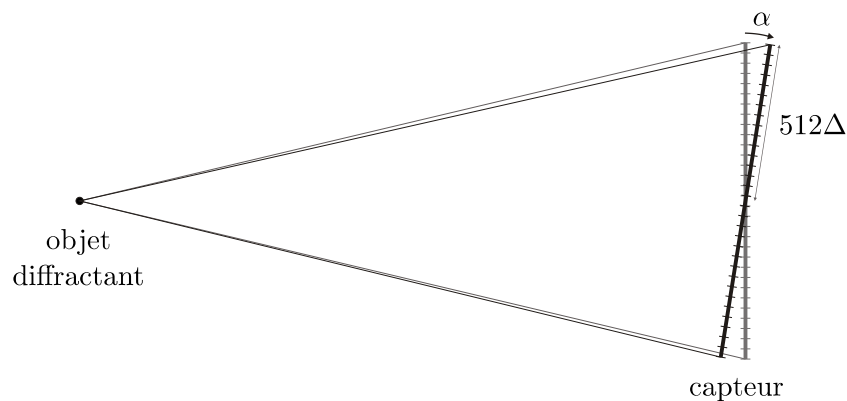
**Source laser** La source utilisée présente toujours un défaut d'homogénéité de l'amplitude du faisceau. Ainsi, l'onde de référence est d'amplitude constante ni dans les plans

contenant les objets éclairés, ni dans le plan du capteur. Cette inhomogénéité conduit tout d'abord à des distortions de l'amplitude des images des objets : les objets se trouvant dans les zones de plus forte amplitude seront restitués avec un meilleur contraste que ceux ayant reçu une amplitude inférieure. L'amplitude d'un faisceau laser est généralement modélisée par un mode principal gaussien. Les objets en bord de champ reçoivent donc moins d'énergie que ceux situés au centre du capteur. Ce phénomène peut être limité en utilisant un laser d'une puissance suffisante pour que le faisceau puisse être élargi de sorte que les objets se trouvent dans la région centrale d'amplitude quasi-constante du faisceau. L'inhomogénéité de l'onde de référence incidente sur le capteur se traduit ensuite par des systèmes d'anneaux dont l'amplitude n'est pas homogène sur le capteur. Ce phénomène est cependant peu marqué.

L'onde issue de la source peut également présenter un défaut de planarité. Souvent, une onde divergente est utilisée avec l'approximation de planarité à grande distance.

**Objets** Tout objet (poussière, support, lame de verre, polariseur, etc...) se trouvant sur le chemin optique génère une figure d'interférence parasite. Les objets sont d'autant plus gênants qu'ils sont situés près du capteur. Les caméras numériques possèdent souvent une plaque de verre protégeant le capteur. Cette plaque produit des franges d'interférence parasites et les poussières collées créent des figures de diffraction parasites. Cette contribution de bruit peut être quasiment supprimée par soustraction d'une "image de fond", c'est à dire d'un hologramme sans les objets d'intérêt grâce à la linéarité du modèle *approché* de formation (équation 1.10).

**Caméra** Si le plan du capteur de la caméra n'est pas parfaitement orthogonal à l'axe optique, alors les figures de diffraction des objets seront déformées. L'hologramme d'une particule sphérique deviendra un système d'anneaux elliptiques au lieu du système d'anneaux circulaires attendu.



**Fig. 1.11** — Modification du chemin optique en bord de capteur lorsque celui-ci est incliné d'un angle  $\alpha$ .

La figure 1.11 illustre la modification de chemin optique qu'introduit un défaut d'orthogonalité d'angle  $\alpha$  non désirée du plan du capteur. Considérons l'hologramme d'un

objet sphérique diffractant situé sur l'axe optique. Nous pouvons calculer, pour un petit angle  $\alpha$  la différence de chemin optique reliant l'objet à une des extrémités du capteurs. Si  $\alpha$  est nul, alors les longueurs des chemins sont égales et les extrémités du capteur enregistrent un même anneau. Par contre, si  $\alpha$  est petit, alors la différence entre les longueurs des deux chemins optiques devient pour  $N \times N$  pixels de taille  $\Delta \times \Delta$  :  $N\Delta\alpha$ . Si cette différence vaut  $\lambda/2$ , alors une des extrémités du capteurs enregistre un anneau clair quand l'autre enregistre un anneau sombre. Ce phénomène intervient dès que  $\alpha \geq \lambda/(2N\Delta)$ , soit  $\alpha \geq 5 \cdot 10^{-5} \text{rad}$  pour une matrice  $1024 \times 1024$  avec  $\Delta = 6.7 \mu\text{m}$ . L'angle  $\alpha$  peut être réglé par superposition de la tâche du faisceau laser réfléchi par la lamelle protectrice de la caméra sur le laser à une précision de  $2 \cdot 10^{-5} \text{rad}$  (superposition à  $2 \text{mm}$  près après une distance parcourue d' $1 \text{m}$ ). Cette erreur est d'autant plus importante que la taille d'un pixel et que le nombre de pixels sont importants. L'effet peut être réduit en utilisant un prétraitement basé sur un ré-échantillonnage de l'hologramme ou un post-traitement tel qu'une transformation de Fresnel de paramètre différent pour les lignes et pour les colonnes [LBCM03].

## 5.2 Bruit de caméra

La caméra réalise les opérations de détection, échantillonnage et de quantification. Ces trois opérations sont génératrices de bruit :

**Détection** Le bruit de photon, associé à la détection des photons incidents sur le capteurs est caractérisé par une distribution poissonnienne. Ce bruit est important lorsque le nombre de photons détectés par pixel est faible, ce qui n'est pas le cas en holographie de Gabor. Même lorsque le temps d'intégration est court (application en velocimétrie), l'énergie reçue est importante grâce à l'utilisation de lasers pulsés. Ce bruit n'est donc pas important devant les autres sources de bruit.

**Echantillonnage** L'échantillonnage et l'intégration sur le pixel introduits par le capteur sont une source d'erreur par rapport au signal continu d'origine. Son influence a été étudiée notamment dans [Kre02, GZRW03, SJ04, JS04, Fou03].

Le passage d'une intensité continue  $I(\xi, \eta)$  à l'image  $I_{N,M}(x, y)$  est réalisé en 3 étapes :

$$I_{N,M}(x, y) = \underbrace{\left( I(\xi, \eta) * \Pi_{\frac{\xi}{\alpha\Delta\xi}, \frac{\eta}{\beta\Delta\eta}} \right)}_{(a)} \times \underbrace{\prod_{\frac{\xi}{\Delta\xi}, \frac{\eta}{\Delta\eta}}}_{(b)} \times \underbrace{\Pi_{\frac{\xi}{N\Delta\xi}, \frac{\eta}{M\Delta\eta}}}_{(c)}. \quad (1.27)$$

(a) intégration sur le pixel de taille  $\Delta\xi \times \Delta\eta$  et de taux de remplissage  $(\alpha, \beta)$ ,

(b) échantillonnage,

(c) fenêtrage par le support physique du capteur.

L'effet dû au taux de remplissage se traduit par un filtrage passe-bas d'autant plus important que le taux de remplissage est élevé. Dans le cas où des fréquences plus importantes que la fréquence de Shannon sont présentes dans le signal, un taux de remplissage proche de 1 limite le repliement spectral [JS04].

Un échantillonnage en deçà la fréquence de Shannon conduit à l'apparition d'objets fantômes, comme illustré en figure 1.12. Les conséquences d'un tel phénomène sont dramatiques dans un problème de détection/suivi de micro-objets dans les images restituées. On peut par contre penser que dans le cadre d'une détection optimale dont le modèle de signal serait une figure de diffraction mal échantillonnée, la résolution obtenue pourrait être supérieure à celle prévisible pour cet échantillonnage.

Le fenêtrage par le support du capteur est la contrainte majeure dont on peut difficilement s'affranchir en holographie numérique. Les capteurs numériques sont de taille très inférieure (de l'ordre du centimètre) aux plaques photosensibles (de l'ordre de la dizaine de centimètres). Il est nécessaire pour surmonter ce handicap d'utiliser des approches robustes vis à vis de cette contrainte. C'est notamment le cas de la formulation comme un problème inverse développée dans le cadre de la détection de micro-objets dans le chapitre 3.

**Quantification** La quantification du signal échantillonné par le capteur en  $2^{N_{bits}}$  niveaux ajoute un bruit supplémentaire : le bruit de quantification. La figure de diffraction d'une particule sphérique de diamètre  $D$  enregistrée sur une caméra située à la distance  $z$  est codée sur approximativement  $\frac{\pi D^2}{2\lambda z} 2^{N_{bits}}$  niveaux différents, [Fou03]. Les oscillations de la figure de diffraction d'une particule de  $70\mu m$ , enregistrées à une distance  $z = 150mm$  sur un capteur de résolution 14 bits sont donc codées sur 330 niveaux de gris.

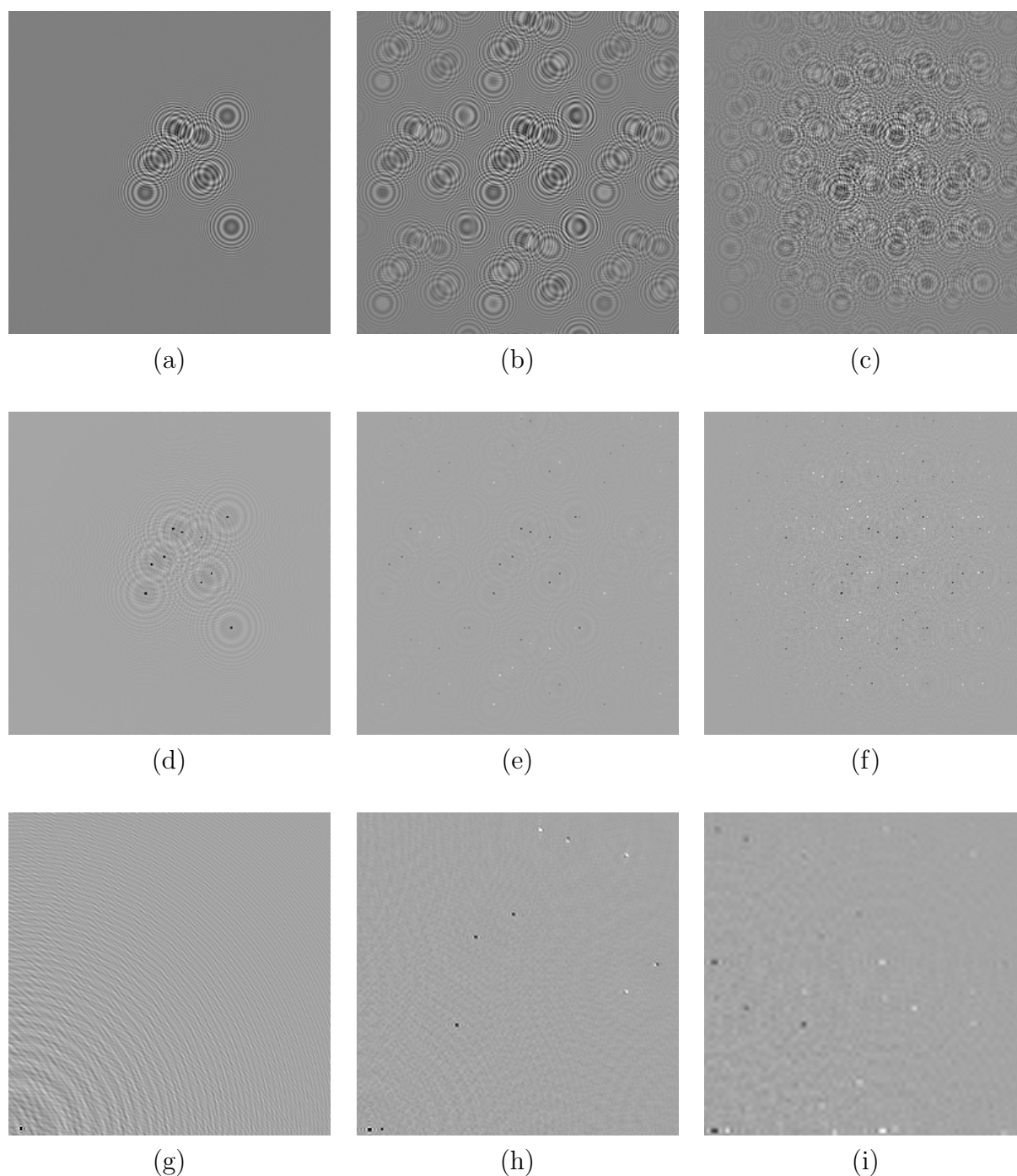
Ce bruit est donc plus important quand les objets sont petits et placés loin du capteur.

### 5.3 Bruit de modèle

Le bruit le plus important en holographie numérique en ligne vient de l'écart entre les modèles approchés utilisés et le phénomène physique réel. Nous détaillons dans ce paragraphe les principales causes d'erreur de modèle.

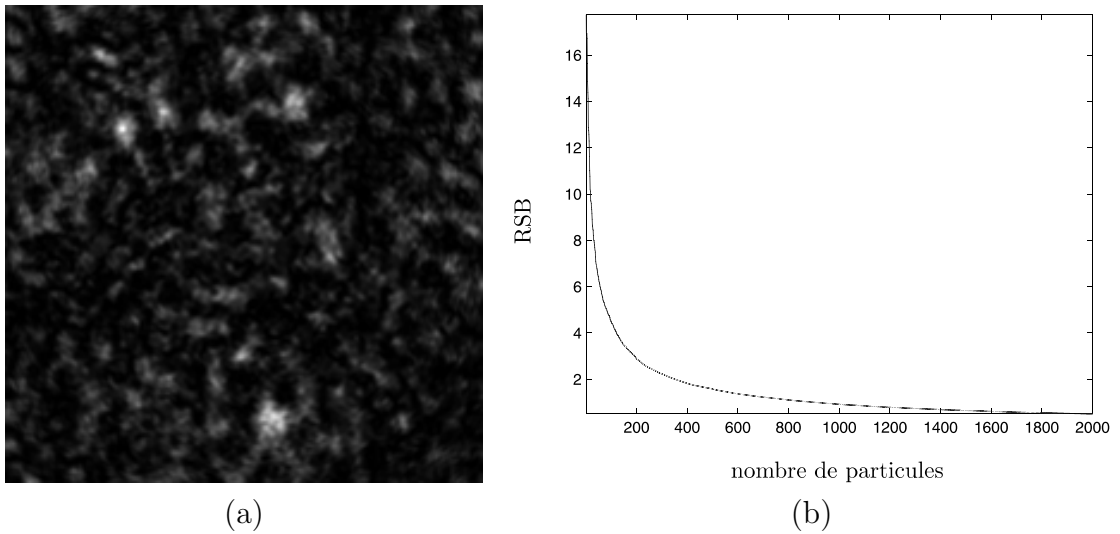
**Approximation linéaire** Le traitement des hologrammes, notamment par restitution puis analyse des plans restitués, s'appuie sur le modèle linéaire de formation de l'hologramme : équation (1.10). Ce modèle ne prend pas en compte la partie non linéaire de la figure de diffraction d'un objet, ni les interférences inter-objets. La déformation de l'onde de référence lors de la traversée du volume d'objets est également négligée (voir discussion dans [Fou03]). L'hologramme peut donc être considéré comme la somme de deux termes : la somme (en intensité) des figures de diffraction de chaque objet et un terme de bruit qui contiendra toutes les erreurs commises entre le modèle et le phénomène réel de diffraction.

L'influence des interférences inter-objets peut-être évaluée à l'aide de simulations numériques. La figure 1.13(a) représente l'image de différence entre un hologramme généré selon le modèle linéaire 1.10 et un hologramme des mêmes objets généré selon l'équation 1.9, c'est à dire prenant en compte toutes les interférences. L'ensemble d'objets considéré est un nuage de 300 particules sphériques opaques de  $100\mu m$  de diamètre.



**Fig. 1.12** — Effet du sous-échantillonnage d'un hologramme : apparition d'objets fantômes : (a) à (c) : Hologramme simulé sur un capteur de respectivement  $1024 \times 1024$ ,  $512 \times 512$  et  $256 \times 256$  pixels (taux de remplissage : 0.5) ; (d) à (f) : Restitution des hologrammes (a) à (c) à la distance de mise au point ; (g) à (i) : Zoom  $\times 3$  sur le coin supérieur droit des images restituées (d) à (f).

Les hologrammes sont enregistrés à  $100\text{mm}$  sur un capteur  $200 \times 200$  dont les pixels font  $10\mu\text{m}$  de large. L'image de différence présente une granularité dont la taille est de l'ordre de la taille des particules. Le rapport signal sur bruit, évalué comme le rapport des écarts-types du signal calculé selon le modèle linéaire et du bruit défini comme la différence entre les deux simulations (linéaire et avec toutes les interférences), évolue comme illustré en figure 1.13(b) avec le nombre de particules. Cette simulation nous permet de vérifier que le RSB est bon tant que le nombre de particules n'est pas trop important. Notons que quand la concentration en particules devient très importante, la validité des simulations numériques n'est plus garantie car l'hypothèse de planéité de l'onde de référence lors de la traversée du volume n'est plus vérifiée.



**Fig. 1.13** — Illustration du bruit non linéaire apparaissant en interprétant l'hologramme selon le modèle linéaire de formation : (a) image de différence entre un hologramme de micro-particules simulé avec interférences et un hologramme simulé selon le modèle linéaire ; (b) évolution du rapport signal sur "bruit non linéaire" avec le nombre de particules.

**Influence des autres objets** Nous nous intéressons à des hologrammes de plusieurs micro-objets répartis en volume. Quand le nombre d'objets augmente, la figure de diffraction associée à l'un d'entre eux est de plus en plus brouillée par la sommation des autres figures de diffraction. Les hologrammes sont des images dont l'une des particularités est que le support spatial de la figure de diffraction d'un objet est grand vis à vis de la taille de l'objet. La conséquence directe de cette particularité est la superposition des images d'objets quand leur nombre augmente. Cette superposition est gênante car elle rend plus difficile la détection d'une figure de diffraction donnée. Lorsque l'on s'intéresse à un objet donné, les figures de diffraction des autres objets sont souvent considérées comme formant du bruit que l'on appelle *bruit de speckle* à cause de sa granularité [MAHL93]. Il faut cependant noter qu'il ne s'agit principalement que d'une sommation *incohérente* (en intensité) des figures de diffraction de chaque objet. C'est là une distinction (contradiction ?) importante par rapport à l'emploi habituel du terme

“speckle” qui désigne alors la sommation *cohérente* de multiples sources secondaires de phase aléatoire [Goo06].

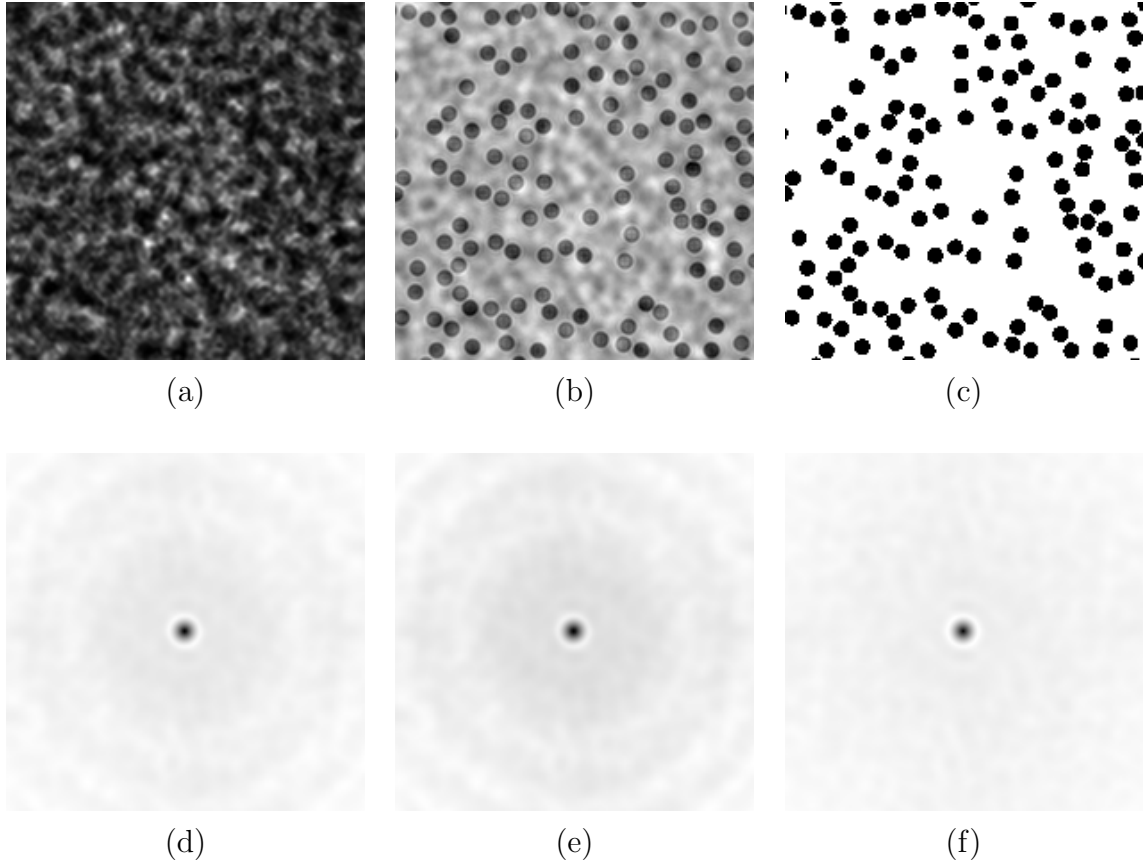
La figure 1.14(a) illustre un hologramme simulé de micro-particules situées dans un plan avec une densité surfacique (rapport entre l’aire des projections des particules dans le plan de l’hologramme et l’aire totale du capteur) de 18%. La granularité apparaît très nettement. Une question que l’on peut se poser en observant une telle image est : quel est le spectre de cette granularité ? ou la question équivalente : quelle est l’autocorrélation de cette granularité ? En anticipant les résultats du chapitre 4, la réponse est très simple : il s’agit du spectre / de l’autocorrélation des ouvertures des objets. Si tous les objets sont identiques (ex : particules mono-dispersées en taille), alors les figures de diffraction — quelle que soit la distance objet-capteur — ont toutes le même spectre / la même autocorrélation (en première approximation, voir le chapitre 4). Ce résultat est important car il signifie qu’aucune distinction basée sur le spectre ou la corrélation ne peut être faite entre le signal cherché (i.e. la figure de diffraction d’un objet particulier) et la granularité considérée comme un bruit de fond. Nous reviendrons sur ce sujet dans le chapitre 3.

**Approximation de restitution : bruit d’images jumelles** Nous avons déjà mentionné dans le paragraphe 4.5 l’approximation réalisée lors de la restitution par convolution par la partie réelle de la fonction Fresnel. Cette approximation est responsable de l’apparition d’une image jumelle dans les plans restitués. Nous étudions plus en détail cet effet dans le chapitre 2. La sommation des images jumelles de chaque objet conduit à l’apparition d’une granularité que l’on appelle à nouveau *bruit de speckle* (figure 1.14). Il s’agit toujours principalement de la superposition incohérente des figures de diffraction des objets, cette fois-ci enregistrée à une distance égale à la somme de la distance d’enregistrement de l’hologramme et de la distance de restitution. Les propriétés statistiques d’ordre 2 (spectre ou corrélation) restent identiques puisque nous avons dit qu’elles ne dépendaient pas de la distance d’enregistrement mais seulement de l’ouverture des objets. Ce résultat est intéressant puisque, tout comme dans le plan de l’hologramme, il n’est pas possible de distinguer le bruit d’image jumelle (ou de speckle) dans les plans restitués par rapport aux objets focalisés sur la base du spectre ou de la corrélation. Notons que dans les études réalisées sur le bruit de speckle propre à l’holographie de micro-particules [MAHL93, HH01], la taille des grains de speckle est décrite comme étant de l’ordre de celle des objets. Nous confirmons ce résultat intuitif et allons plus loin en donnant l’expression de l’autocorrélation de ce bruit.

## 6 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que l’holographie en ligne était adaptée à l’étude de micro-objets en mouvement. Deux domaines d’application sont visés : la mesure en mécanique des fluides (les objets sont alors des micro-particules sphériques) et le contrôle en ligne (poudres, fibres).





**Fig. 1.14** — Granularité speckle apparaissant en holographie de micro-particules avec une densité surfacique de particules de 18%. Les images sont des fenêtres  $200 \times 200$  extraites d'images  $1024 \times 1024$  non représentées. (a) Speckle dans le plan de l'hologramme; (b) speckle dans le plan restitué; (c) plan restitué idéal. Les autocorrélations des images (a), (b) et (c) sont représentées en (d), (e) et (f) respectivement. La granularité est de même taille dans les trois images. Les spectres sont même quasi-identiques (si l'on néglige les variations correspondant aux grandes longueurs de corrélation, dues aux images jumelles).

La restitution numérique peut être réalisée en simulant la formation de l'image 3D obtenue par restitution optique. La diffraction de l'onde ré-éclairant l'hologramme se modélise comme une convolution par un chirp linéaire que l'on appelle transformée de Fresnel.

L'intensité enregistrée dans un hologramme peut-être reliée à l'ouverture des objets dans le cadre d'un modèle de formation de l'hologramme. Plusieurs modèles ont été déduits de l'intégrale de diffraction. Le cas de micro-objets permet d'approximer l'intensité de l'hologramme comme la somme des figures de diffraction de Fresnel de chacun des objets. L'information apparaît alors codée dans l'hologramme par une modulation d'amplitude et de fréquence de l'intensité. Le "décodage" des hologrammes s'apparente à de la détection de "chirps".

Plusieurs types d'approches sont possibles : filtrage optimal de l'hologramme, analyse par transformation multi-échelle, formalisation dans le cadre des problèmes inverses ou

de type modèle aléatoire d'image. Nous allons considérer dans les chapitres suivants la problématique de l'analyse quantitative des hologrammes à la lumière de ces différents domaines.

La présentation des différentes sources de bruit en holographie en ligne a permis de mettre en évidence des bruits pouvant être atténués par amélioration de la qualité du montage. Le bruit d'image jumelle reste intrinsèque à la restitution d'un hologramme de Gabor. Le chapitre 2 est consacré à la présentation de son origine, de ses caractéristiques et de sa suppression.



## CHAPITRE 2

# Filtrage de l'image jumelle : débruitage des images restituées

---

*Le bruit d'image jumelles apparaît lors de la restitution optique ou numérique d'un hologramme en ligne. En effet, l'étape de restitution n'inverse pas parfaitement l'étape d'enregistrement de l'hologramme. L'image jumelle peut être supprimée si l'on dispose de la phase dans le plan de l'hologramme, ou si l'on inverse numériquement l'équation de formation de l'hologramme. Après avoir présenté les techniques de suppression de l'image jumelle disponibles dans la littérature, nous proposons un algorithme de filtrage non linéaire adapté aux micro-objets répartis en 3D.*

---

*Ce chapitre s'appuie sur les articles de congrès [DFFD05, DFFD06].*

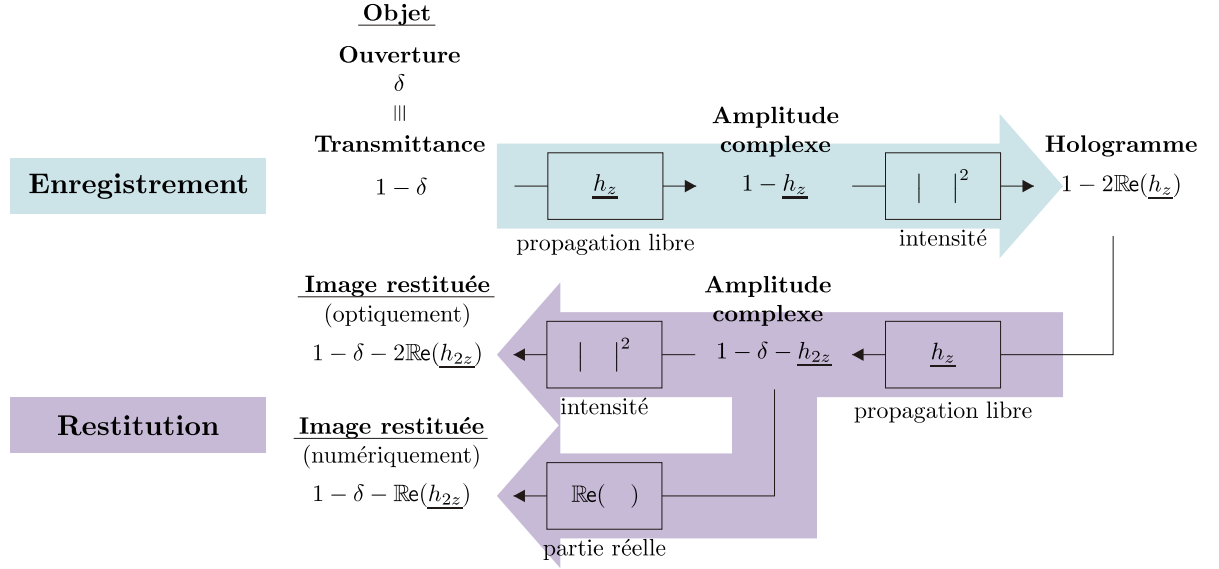
## 1 Origine et caractéristiques de l'image jumelle

La présence d'une image jumelle (ou virtuelle) est apparue dès les débuts de l'holographie comme une limitation de la technique [LU62]. Elle se présente sous la forme d'une image très défocalisée des objets holographiés, se superposant lors de la restitution optique ou numérique de l'hologramme à l'image des objets. Nous précisons dans le paragraphe suivant l'origine de l'image jumelle avant de décrire ses caractéristiques.

### 1.1 Origine de l'image jumelle

Son origine est intrinsèque au principe de l'holographie en ligne. En effet, nous allons montrer dans le cadre de l'approximation linéaire de formation de l'hologramme (chapitre 1, section 4.1) que la réponse impulsionnelle du système complet : enregistrement + restitution optique ou numérique contient un terme jumeau.

Caractérisons le système par sa réponse impulsionnelle  $g$ . La figure 2.1 illustre les opérations intervenant. Un objet opaque ponctuel d'ouverture  $\delta$  éclairé par une onde



**Fig. 2.1** — Réponse impulsionnelle des systèmes d'holographie en ligne optique (restitution optique) et numérique (restitution numérique).

incidente plane donne naissance à une onde diffractée dont l'amplitude complexe dans un plan situé à la distance  $z$  vaut  $1 - \underline{h}_z$ . Seule l'intensité peut être mesurée par un capteur, l'expression de l'amplitude de l'hologramme enregistré à la distance  $z$  s'écrit donc  $1 - 2\Re(\underline{h}_z)$ . L'étape de restitution est réalisée en deux temps. L'intensité de l'hologramme est tout d'abord propagée par diffraction jusqu'au plan de focalisation situé à la distance  $z$ . L'amplitude de l'onde diffractée par l'hologramme vaut alors  $1 - \delta - \underline{h}_{2z}$ . Dans le cas d'une restitution optique, l'intensité de cette amplitude est alors mesurée dans le plan de focalisation et a pour valeur :  $1 - \delta - 2\Re(\underline{h}_{2z})$ . La réponse impulsionnelle du système total d'enregistrement + restitution optique s'exprime donc :

$$g_{\text{optique}} = \delta + 2\Re(\underline{h}_{2z}). \quad (2.1)$$

Dans le cas d'une restitution numérique, seule la partie réelle de l'amplitude complexe est conservée  $1 - \delta - \Re(\underline{h}_{2z})$ , soit une réponse impulsionnelle pour le système total enregistrement optique + restitution numérique :

$$g_{\text{numérique}} = \delta + \Re(\underline{h}_{2z}). \quad (2.2)$$

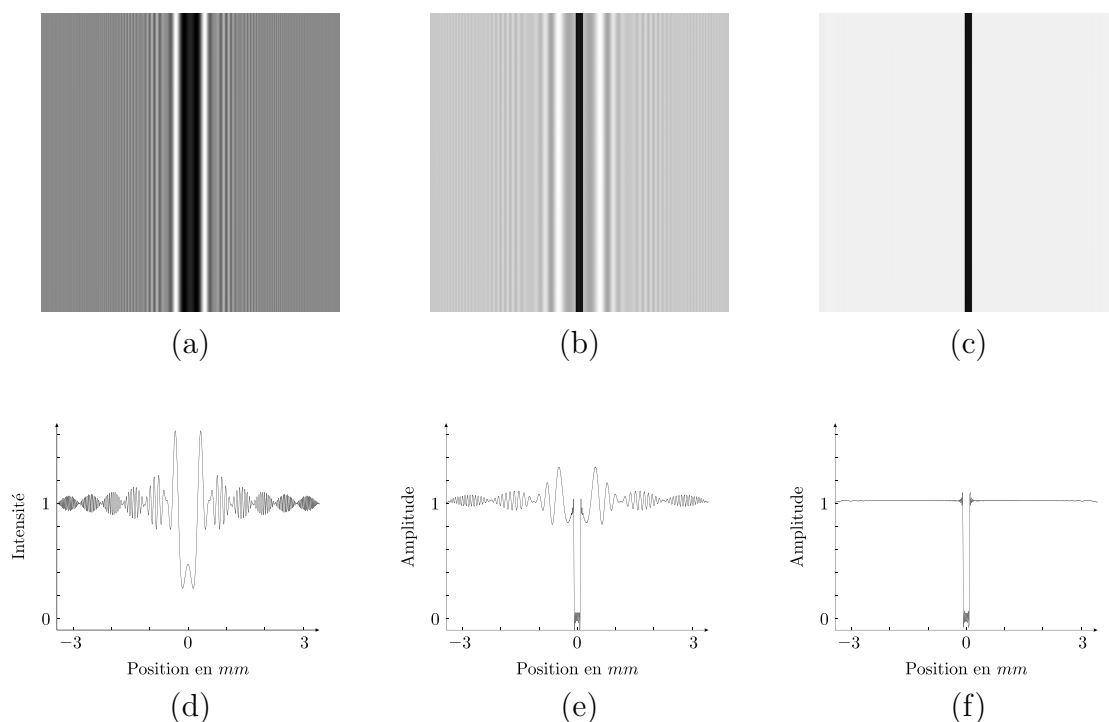
Dans chacun des cas l'image d'un point n'est donc pas un point (système idéal) ni une tâche relativement localisée (système optique classique) mais la superposition d'un point<sup>1</sup> et d'un système d'anneaux concentriques présentant une modulation linéaire de fréquence.

<sup>1</sup>Notons que nous avons volontairement simplifié l'expression des réponses impulsionnelles en considérant le capteur infini et sans effet d'échantillonnage ou de quantification afin de nous concentrer sur le phénomène d'image jumelle. Il serait plus réaliste de considérer des réponses impulsionnelles filtrées passe-bas.

**Interprétation optique** Une interprétation optique de l'expression de l'intensité enregistrée sur l'hologramme est utile pour mettre en lumière le phénomène d'image jumelle. Dans le cadre de l'approximation de formation linéaire de l'hologramme, valable pour les petits objets, l'intensité de l'hologramme d'un point s'écrit  $1 - 2\text{Re}(h_z)$ . Cette intensité est considérée ensuite comme une amplitude complexe et est propagée, optiquement ou numériquement, pour restituer l'hologramme. Si l'on développe l'expression de l'hologramme d'un point :  $1 - 2\text{Re}(h_z) = 1 - \underline{h}_z - h_{-z}$ , l'intensité peut s'interpréter comme l'amplitude complexe apparaissant lors de l'interférence entre une onde plane de référence, l'onde issue du point objet à la distance  $z$  en amont de l'hologramme et l'onde issue d'un point objet virtuel situé à la distance  $z$  en aval. Ainsi, enregistrer l'intensité de l'onde dans le plan de l'hologramme au lieu d'enregistrer son amplitude complexe peut s'interpréter comme l'ajout d'un objet jumeau, symétrique de l'objet initial par rapport au plan de l'hologramme et diffractant dans le sens opposé.

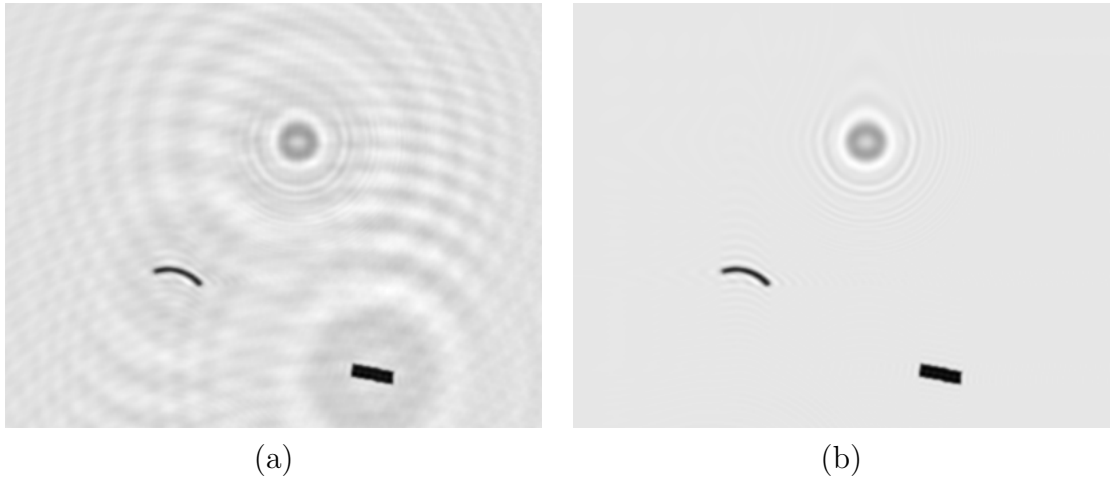
## 1.2 Caractéristiques de l'image jumelle

**Illustrations** Les figures 2.2 et 2.3 illustrent sur des simulations numériques l'apparition des images jumelles des objets lors de la restitution. La figure 2.2(a) représente



**Fig. 2.2** — Illustration de l'apparition de l'image jumelle lors de la restitution : (a) hologramme simulé d'un objet opaque vertical de longueur très supérieure à celle de l'hologramme ; (b) restitution de l'hologramme (a) dans le plan de focalisation faisant apparaître l'image jumelle de l'objet (oscillations dans le fond) ; (c) restitution avec connaissance de la phase de l'hologramme, l'image jumelle n'apparaît plus ; (d) à (f) profils de ligne des images (a) à (c) respectivement.

un hologramme simulé d'un objet vertical de 168 microns de diamètre et de longueur très supérieure à la taille de l'hologramme, situé à 150mm. L'hologramme ainsi obtenu est invariant par translation le long de l'axe de l'objet. La courbe 2.2(d) correspond au profil d'une ligne de l'hologramme. La restitution numérique à la distance  $z = 150mm$  fait apparaître une image au point de l'objet ainsi que son image jumelle (2.2(b)). Le profil d'une ligne, représenté en figure 2.2(e), met en évidence la superposition du profil de l'objet et de son image jumelle : les oscillations visibles hors du support de l'objet correspondent à un hologramme enregistré à la distance  $2z$ . Une restitution utilisant l'amplitude et la phase de l'hologramme (directement accessible dans une simulation numérique) donne une image focalisée de l'objet sans image jumelle parasite (figure 2.2(c) et (f)).



**Fig. 2.3** — Illustration de l'image jumelle de petits objets : (a) plan restitué faisant apparaître les images des objets ainsi que leur image jumelle superposée ; (b) plan restitué en utilisant la phase de l'hologramme, les images jumelles ont disparu.

La figure 2.3 illustre, dans le cas d'un hologramme simulé de micro-objets répartis en volume, le phénomène d'image jumelle apparaissant à la restitution. L'image 2.3(a) a été obtenue par restitution numérique de l'hologramme. Autour de l'image de chaque objet se superpose leur image jumelle très défocalisée. L'image 2.3(b) a été obtenue par restitution numérique avec connaissance de l'amplitude et de la phase de l'hologramme. Elle ne présente par conséquent aucune image jumelle. Dans cette simulation tous les objets ne se trouvent pas dans le même plan ; par conséquent, les restitutions ne donnent pas une image avec tous les objets "au point". L'objet se trouvant dans la moitié supérieure de l'hologramme est défocalisé car la distance de restitution ne correspond pas à la distance d'enregistrement.

**Expression approchée de l'image jumelle** Dans le cadre de l'étude de micro-objets, caractérisés par leur ouverture  $\vartheta_i$  centrée en  $(x_i, y_i)$ , l'expression de l'image jumelle associée à chaque objet peut être approchée. Par définition de la réponse impulsionnelle du système, l'image d'un objet formée par le système d'enregistrement +

restitution numérique est donnée par :

$$\vartheta_i \underset{(x,y)}{*} g_{\text{numérique}} = \vartheta_i(x, y) + \vartheta_i \underset{(x,y)}{*} \mathbb{R}e(\underline{h_{2z_i}}), \quad (2.3)$$

avec  $z_i$  la distance entre l'objet  $i$  et l'hologramme. Le premier terme correspond à l'image focalisée de l'objet et le second à l'image jumelle. Ce second terme peut être approximé par un produit dans le cas d'un petit objet de grand diamètre  $D_i$ <sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \vartheta_i \underset{(x,y)}{*} \mathbb{R}e(\underline{h_{2z_i}}) &= \mathbb{R}e \left[ \vartheta_i \underset{(x,y)}{*} h_{2z_i} \right] \\ &= \mathbb{R}e \left[ \frac{1}{2j\lambda z_i} \iint \vartheta_i(\xi, \eta) \exp \left( j \frac{\pi}{2\lambda z_i} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right) d\xi d\eta \right] \\ &\approx \mathbb{R}e \left[ \frac{1}{2j\lambda z_i} \exp \left( j \frac{\pi}{2\lambda z_i} [x^2 + y^2] \right) \iint \vartheta_i(\xi, \eta) \exp \left( \frac{-2j\pi}{2\lambda z_i} [x\xi + y\eta] \right) d\xi d\eta \right] \\ &\text{avec } \frac{1}{2\lambda z_i} [\xi^2 + \eta^2]_{\max} \ll 1, \text{ soit } D_i \ll \sqrt{2\lambda z_i}. \\ &\approx \mathbb{R}e \left[ \mathcal{F}[\vartheta_i] \left( \frac{x}{2\lambda z_i}, \frac{y}{2\lambda z_i} \right) \underline{h_{2z_i}(x,y)} \right] \\ &\approx \mathcal{F}[\vartheta_i] \left( \frac{x}{2\lambda z_i}, \frac{y}{2\lambda z_i} \right) \mathbb{R}e \left[ \underline{h_{2z_i}(x,y)} \right] \text{ si } \vartheta_i \text{ est symétrique.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

L'équation 2.4 est une approximation valable si  $D_i \ll \sqrt{2\lambda z_i}$ . Pour les valeurs typiques  $\lambda = 0.6\mu m$  et  $z_i = 100mm$ , cette condition s'exprime :  $D_i \ll 245\mu m$ . L'équation 2.4 permet d'analyser l'influence de la distance d'enregistrement et de la taille des objets sur la qualité des images restituées.

**Influence de la distance d'enregistrement** Si l'image focalisée de l'objet ne change pas avec la distance d'enregistrement de l'hologramme (effet de fenêtrage par le capteur mis à part), l'image jumelle dépend quant à elle de la distance  $z_i$  de chaque objet à l'hologramme. Si l'on considère le  $i^{\text{ème}}$  objet, l'expression approchée de son image donnée par l'équation 2.4 fait nettement apparaître la dépendance à  $z_i$ . Plus la distance  $z_i$  est importante, plus l'image jumelle est dilatée. Ainsi, un hologramme enregistré à faible distance donnera lieu à des images jumelles se superposant aux images focalisées alors qu'à plus grande distance les images jumelles sont délocalisées sur toute l'image restituée.

Le premier terme du produit apparaissant au second membre de l'approximation 2.4 correspond à la modulation d'amplitude de l'hologramme de l'objet  $i$  enregistré à la distance  $2z_i$ . Cette modulation varie très peu sur le support de l'objet. Le deuxième terme représente la modulation fréquentielle des franges d'interférences. La frange centrale, c'est à dire l'ensemble des  $(x, y)$  pour lesquels  $\mathbb{R}e(\underline{h_{2z_i}})_{(x,y)}$  n'a pas atteint son premier maximum, est donnée par  $(x^2 + y^2)/(2\lambda z_i) < 1/2$  ou  $\rho < \sqrt{\lambda z_i}$  (avec  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ).

---

<sup>2</sup> $D_i$  est le diamètre du cercle circonscrit à l'ouverture  $\vartheta_i$



Cette frange est plus grande que le support de l'image de l'objet si  $D_i < 2\sqrt{\lambda z_i}$ , c'est à dire quand l'approximation de petits objets est valable. Ainsi l'image focalisée de l'objet se trouve dans la frange centrale des oscillations de l'image jumelle qui lui est associée. Les deux images sont d'autant mieux séparées que la distance d'enregistrement  $z_i$  est importante.

**Rapport signal sur bruit** Un élément important pour caractériser l'effet d'image jumelle est le contraste entre l'image focalisée et l'image jumelle. Nous l'étudions par l'intermédiaire du rapport signal sur bruit que l'on définit ici comme le rapport entre l'amplitude de l'image de l'objet (premier terme du second membre de l'équation 2.3) et le maximum de l'amplitude de l'image jumelle (second terme du second membre de l'équation 2.3). Pour un petit objet opaque et symétrique,  $\vartheta_i = 1$  dans le support et  $\vartheta_i = 0$  hors du support de l'objet ; l'image jumelle est définie par l'expression approchée de l'équation 2.4. L'image jumelle peut être considérée comme un système de franges modulées en amplitude et en fréquence. Le terme de modulation d'amplitude s'écrit :

$$\frac{1}{2\lambda z_i} \mathcal{F}[\vartheta_i] \left( \frac{x}{2\lambda z_i}, \frac{y}{2\lambda z_i} \right). \quad (2.5)$$

Pour une distance  $z_i$  donnée, nous pouvons étudier l'influence de la taille de l'objet. Si l'objet est dilaté d'un facteur  $\alpha$ , alors, par application de la propriété de dilatation de la transformée de Fourier, l'amplitude de l'image jumelle sera multipliée par un facteur  $|\alpha|$ . Pour une même distance d'enregistrement, le rapport signal-bruit est donc meilleur pour un petit objet que pour un grand.

Pour un objet donné, la distance d'enregistrement  $z_i$  intervient à la fois comme facteur de proportionnalité  $1/z_i$  de l'amplitude et comme facteur de dilatation de l'image jumelle (cf. paragraphe précédent). Pour un même objet, le rapport signal-bruit est donc plus élevé pour une distance d'enregistrement supérieure.

Le tableau 2.1 résume l'évolution du rapport signal-bruit, de la séparation entre l'image focalisée et l'image jumelle ainsi que la taille du support spatial de l'image jumelle quand la taille des objets augmente (ligne 1) et quand la distance d'enregistrement augmente (ligne 2). Le pire des cas est un hologramme enregistré à faible distance d'objets de relativement grande taille.

**Remarque sur les spectres de l'image focalisée et l'image jumelle** La propagation en champ libre d'une onde est modélisée dans le cadre de l'approximation de Fresnel par une convolution par une fonction de Fresnel. Cette fonction possède un spectre de puissance constant (i.e. indépendant de la fréquence). La conséquence immédiate de cette propriété est que *la diffraction* de l'amplitude complexe  $\underline{A}_{z_1}$  d'un plan  $z_1$  à un plan  $z_2$  ne modifie pas le spectre de l'amplitude complexe :

$$\left| \mathcal{F}[\underline{A}_{z_2}] \right|^2 = \left| \mathcal{F}[\underline{A}_{z_1} * \underline{h}_{z_2-z_1}] \right|^2 = \left| \mathcal{F}[\underline{A}_{z_1}] \right|^2. \quad (2.6)$$

	RSB	Séparation image focalisée / image jumelle	Support spatial de l'image jumelle
Taille des objets ↗	↘	↘	↘
Distance d'enregistrement ↗	↗	↗	↗

**Tab. 2.1** — Influence de l'augmentation de la taille des objets et de la distance d'enregistrement sur le rapport signal/bruit (RSB), la séparation de l'image focalisée et de l'image jumelle d'un même objet et l'influence de l'image jumelle sur les images des autres objet (taille du support spatial). Les flèches indiquent la proportionnalité ↗ ou la proportionnalité avec l'inverse du paramètre ↘.

Cette propriété a des conséquences remarquables étudiées plus en détail dans la section 2 du chapitre 4. Dans le cas d'une convolution par la partie réelle d'une fonction de Fresnel, cette propriété reste vraie en première approximation. Ainsi, nous retiendrons que l'image focalisée d'un objet et l'image fortement défocalisée de celui-ci ont approximativement le même spectre. Cette remarque ne motive pas à chercher une solution du côté d'un post-traitement par filtrage linéaire de l'amplitude dans les plans restitués mais plutôt du côté d'un pré-traitement d'une modification de la fonction de restitution (figure 2.4).

## 2 Suppression de l'image jumelle : état de l'art

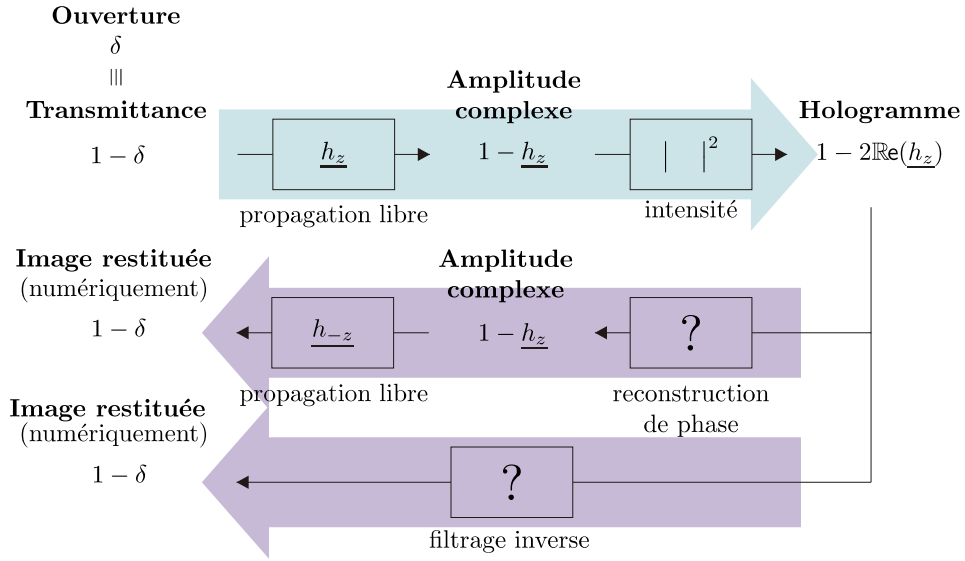
Le problème de l'image jumelle, mis en évidence dès les premiers travaux de Gabor, a été abondamment traité dans la littérature car il touche plusieurs domaines applicatifs : l'holographie optique, l'holographie par rayons X mous, la microscopie électronique. Nous tentons dans ce paragraphe de classer les principales approches par familles en soulignant les similarités et les différences de chacun des travaux.

La suppression des images jumelles dans les images restituées suppose l'amélioration des systèmes d'holographie en ligne tels qu'ils ont été caractérisés en figure 2.1. Il nous apparaît qu'il existe dans la littérature deux grandes voies possibles (figure 2.4) :

- soit la phase de l'hologramme est estimée : approche “phase retrieval”,
- soit la restitution numérique est modifiée : approche “filtrage inverse”.

La première voie consiste en l'estimation de la phase dans le plan de l'hologramme, soit par une technique optique, soit par une méthode numérique. Le volume restitué peut ensuite être obtenu par simulation de la diffraction de l'amplitude complexe (transformée de Fresnel complexe). La deuxième voie vise à obtenir directement le volume débruité par inversion du processus d'acquisition de l'hologramme.

Nous proposons de décrire les solutions proposées dans la littérature en insistant d'abord sur les techniques basées sur une modification du montage optique, avant de décrire les techniques numériques correspondant aux deux voies possibles de traitement évoquées précédemment et dans la figure 2.4.



**Fig. 2.4** — Deux approches possibles pour le filtrage de l'image jumelle : reconstruction de phase et filtrage inverse.

## 2.1 Modification du montage optique

**Holographie hors-axe** Une solution basée sur une modification du montage d'acquisition a été proposée dès les débuts de l'holographie par Leith et Upatnieks [LU62]. Le montage proposé, appelé “hors-axe” est très largement utilisé depuis dans le domaine de l'holographie optique. Le principe consiste à former les hologrammes par l'interférence de l'onde objet et de l'onde de référence légèrement désaxée. Un hologramme hors-axe est facilement reconnaissable par la présence d'une série de franges rectilignes résultant de l'interférence entre l'onde plane de référence et l'onde quasi-plane issue des objets. Lors de la restitution optique ou numérique, les différents ordres (continu, image réelle et image jumelle) se séparent spatialement. Il est ainsi possible par simple filtrage de ne sélectionner que l'image réelle [CMD00].

Lors de l'étude de micro-objets, nous avons justifié au chapitre 1 qu'un montage en ligne était préférable au montage hors-axe. Lorsque d'autres gammes de longueurs d'ondes sont utilisées (rayons X mous), le montage en ligne est le seul réalisable expérimentalement.

**Phase shifting** Une technique permettant d'obtenir facilement la phase dans le plan de l'hologramme a été proposée en 1997 [YZ97]. L'idée de base est d'enregistrer 4 hologrammes à des distances d'enregistrement séparées de  $\lambda/4$ . Cette technique, réalisée avec un montage holographique à deux bras, nécessite de déplacer un des miroirs avec une grande précision ( $\lambda/4 \approx 0.1\mu\text{m}$ ), ce qui peut être réalisé à l'aide d'un composant piézo-électrique. L'approche temporelle du phase shifting ne peut cependant pas être appliquée à l'étude d'objets en mouvements.

**Optical scanning holography** Un montage introduisant une modulation/démodulation supplémentaire ainsi qu'un balayage en  $x, y$  a été proposé [PKI<sup>+</sup>00]. Deux hologrammes sont obtenus par démodulation : un hologramme en cosinus et un hologramme en sinus ; combinés, ils permettent une restitution sans image jumelle. La présence d'un balayage dans le système d'acquisition ne permet pas d'envisager l'étude d'objets en mouvements.

## 2.2 Méthodes numériques

Il existe deux grandes familles de techniques numériques de suppression de l'image jumelle : les techniques cherchant à inverser le système d'acquisition, et les techniques de reconstruction itérative de phase (figure 2.4).

### 2.2.1 Inversion du système d'acquisition

Notons  $\underline{a_z}$  l'amplitude complexe représentant les objets étudiés, situés à la distance  $z$  du capteur. Dans le cas d'un unique objet d'ouverture réelle  $\vartheta$ ,  $\underline{a_z}$  s'écrit simplement  $\underline{a_z} = \vartheta$ . Dans le cas d'un volume de  $N$  micro-objets, on a  $\underline{a_z} = \sum_{i=1}^N \vartheta_i * \delta_{x_i, y_i} * h_{z_i - z}$ .  $\underline{a_z}$  peut également représenter un objet de phase non constante (ex : micro-lentille).

Le problème de restitution d'un hologramme (après suppression du fond continu)

$$\tilde{I}_H = -\underline{a_z} * \underline{h_z} - \underline{a_z}^* * \underline{h_{-z}} \quad (2.7)$$

possède une solution approchée connue : la solution de Gabor (i.e. restitution classique) :

$$\begin{aligned} I_R &= \tilde{I}_H * \underline{h_{-z}} \\ &= -\underline{a_z} - \underline{a_z}^* * \underline{h_{-2z}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Cette solution est polluée par la présence de l'image jumelle en  $2z$  car il s'agit d'une solution approchée seulement. Obtenir une image non dégradée par l'image jumelle, c'est trouver une "bonne" solution au problème de restitution.

### Cas d'un objet plan (ou ensemble d'objets coplanaires) et de transmittance(s) réelle(s)

On a alors  $\underline{a_z} = \underline{a_z}^* \equiv a_z$  et

$$\begin{aligned} \text{(P1)} \quad \tilde{I}_H &= -2a_z * \text{Re}(\underline{h_z}) \\ \text{(P2)} \quad I_R &= -a_z * \left( \delta + \underline{h_{-2z}} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Le problème de restitution est alors un problème de déconvolution que l'on peut formuler soit dans le plan de l'hologramme : problème **(P1)**, soit dans le plan de restitution : problème **(P2)**. Nous allons décrire les approches de suppression numérique de l'image jumelle en essayant de les identifier à des techniques connues de déconvolution.

**Déconvolution par la méthode du quotient dans Fourier** (Fourier-quotient method) Plusieurs auteurs proposent de supprimer l'image jumelle en inversant les équations 2.9 [OS87, YXZJ99, Nug90]. Ils définissent ainsi un filtre inverse  $F_I$  de fonction de transfert :

$$\mathcal{F}[F_I^{(P1)}](u, v) = \frac{1}{\cos \left[ \frac{\lambda z}{4\pi} (u^2 + v^2) \right]},$$

ou

$$\mathcal{F}[F_I^{(P2)}](u, v) = \frac{1}{1 + \exp [-2j\pi\lambda z(u^2 + v^2)]}. \quad (2.10)$$

Ces filtres présentent des singularités à chaque fois que le dénominateur s'annule. Plusieurs solutions sont proposées :

- les filtres sont définis comme étant égaux à l'unité lorsque une singularité est atteinte[MD94],
- une constante strictement positive est ajoutée au dénominateur[Nug90],
- l'expression du filtre est développée en série entière dont seuls les premiers termes sont utilisés[OS87].

Le développement en série permet en outre une forme de régularisation en limitant le nombre de termes. Un développement particulièrement intéressant, dont nous justifierons physiquement la convergence, est :

$$\mathcal{F}[F_I^{(P2)}](u, v) = 1 - \exp [-2j\pi\lambda z(u^2 + v^2)] + \exp [-4j\pi\lambda z(u^2 + v^2)] - \dots + (-1)^n \exp [-2nj\pi\lambda z(u^2 + v^2)]. \quad (2.11)$$

Exprimé dans l'espace direct, le filtrage inverse s'écrit :

$$\begin{aligned} -I_R * F_I^{(P2)} &= -\tilde{I}_H * \underline{h_{-z}} * \left( \delta - \underline{h_{-2z}} + \underline{h_{-4z}} - \dots + (-1)^n \underline{h_{-2nz}} \right) \\ &= (a_z + a_z * \underline{h_{-2z}}) * \left( \delta - \underline{h_{-2z}} + \underline{h_{-4z}} - \dots + (-1)^n \underline{h_{-2nz}} \right) \\ &= a_z + a_z * \underline{h_{-2z}} - a_z * \underline{h_{-2z}} - a_z * \underline{h_{-4z}} + a_z * \underline{h_{-4z}} + a_z * \underline{h_{-6z}} - \dots \\ &\quad + (-1)^n a_z * \underline{h_{-2nz}} + (-1)^n a_z * \underline{h_{-(2n+2)z}} \\ &= a_z + (-1)^n a_z * \underline{h_{-(2n+2)z}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En modifiant la fonction de restitution nous avons donc repoussé l'image jumelle à la distance  $(2n + 2)z$  et ainsi réduit son amplitude de  $1/(2\lambda z)$  à  $1/((2n + 2)\lambda z)$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini  $(-1)^n a_z * \underline{h_{-(2n+2)z}}$  converge uniformément vers 0, ce qui prouve la convergence de la série vers l'expression du filtre inverse de l'équation 2.10. La technique de suppression de l'image jumelle proposée par Yang *et al.* [YXZJ99] est basée sur cette expression du filtre inverse dans l'espace direct.

**Déconvolution par une technique itérative** Le filtre inverse que nous avons obtenu par développement en série peut s'exprimer sous la forme récursive suivante :

$$\begin{cases} a_0 &= I_R \\ a_{n+1} &= I_R - a_n * \underline{h_{-2z}} \end{cases} \quad (2.13)$$

Cette définition récursive correspond à l'algorithme itératif de déconvolution de van Cittert[Cit31, HI76] appliqué au problème **(P2)**.

Dans le cas de micro-objets, il est possible d'introduire une contrainte *a priori* si le support des objets est connu. Notons  $M$  l'image binaire telle que  $M(x, y) = 1$  si le point  $(x, y)$  appartient au support d'un des objets et  $M(x, y) = 0$  sinon. La contrainte de support peut-être appliquée à chaque itération (projection sur le sous-espace des solutions vérifiant la contrainte) :

$$\begin{cases} a_0 &= M \cdot I_R \\ a_{n+1} &= M \cdot \left[ I_R - a_n * \underline{h_{-2z}} \right] \end{cases} \quad (2.14)$$

Cet algorithme correspond à celui développé par Lannes [Lan77].

Koren *et al.* ont proposé[KJP91, KPJ93] un autre algorithme itératif intégrant une contrainte de support :

$$\begin{cases} a_0^{(\text{jum})} &= (1 - M) \cdot I_R + M \cdot \bar{I}_R, \text{ avec } \bar{I}_R \text{ la valeur moyenne de } I_R \\ a_{n+1}^{(\text{jum})} &= (1 - M) \cdot a_0^{(\text{jum})} + M \cdot (a_n * \underline{h_{-2z}}) \\ a_n &= \gamma(1 - M) \cdot (a_n^{(\text{jum})} * \underline{h_{2z}}) + M \cdot (a_n^{(\text{jum})} * \underline{h_{2z}}), \text{ avec } \gamma \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.15)$$

Cet algorithme réalise des allers-retours entre deux plans correspondant respectivement à l'image jumelle  $a^{(\text{jum})}$  et à l'image réelle  $a$ . L'idée fondamentale sur laquelle se base cet algorithme est que l'image réelle et l'image jumelle portent la même information et sont transformées l'une en l'autre par transformée de Fresnel de paramètre  $2z$  ou  $-2z$ . Obtenir une image réelle non perturbée par l'image jumelle, c'est également dans le plan symétrique par rapport à l'hologramme obtenir une image jumelle non perturbée par l'image réelle !

L'image jumelle est parfaitement connue hors du support des objets. Dans le support, par contre, se superposent l'image virtuelle et l'image réelle. L'algorithme reconstruit itérativement l'image jumelle : à chaque étape, l'image jumelle est mise à jour à l'intérieur du masque  $M$  et l'image réelle est atténuée hors du support des objets (hors du support le signal devrait théoriquement être nul).

Cet algorithme suppose une bonne connaissance du support des objets  $M$  et que les effets liés au fenêtrage de l'image jumelle sont négligeables.

**Déconvolution par une approche *maximum a posteriori*** Soththivirat et Fessler ont proposé[SF04] de reconstruire l'image d'un objet plan par une approche de type *maximum a posteriori*. Ils considèrent le modèle non linéaire de formation de l'hologramme et cherchent, sous une hypothèse de bruit poissonnien non corrélé, l'image maximisant

un critère de vraisemblance et de lissage. Leur approche, très pertinente dans le cadre de la microscopie holographique, est moins adaptée à la nature de nos micro-objets : faible support et fort contraste par rapport au fond. De plus le terme non-linéaire apparaissant dans le modèle de formation de l'hologramme (équation 1.9) est négligeable dans notre cas.

### Cas d'un objet plan de transmittance complexe ou d'objets répartis en volume

Il n'est alors plus possible d'écrire les équations 2.7 et 2.8 sous la forme de problèmes de déconvolution sauf en combinant 2 hologrammes du même objet. Plusieurs auteurs [MD94, ZZ03, ZPOT04b] ont développé des approches d'inversion analytique similaires à celles décrites précédemment dans le cadre de la méthode d'inversion dans Fourier. Notons que les techniques itératives avec contrainte de support ainsi que l'approche *maximum a posteriori* de Sotthivirat et Fessler permettent de traiter aussi bien des objets réels que complexes.

Nous avons montré [DFFD05] qu'un développement en série permettait de repousser aussi loin que souhaité l'image jumelle dans le cas d'objets de transmittance complexe ou 3D. En effet, en combinant deux hologrammes  $I_1$  et  $I_2$  enregistrés aux distances  $z$  et  $z + d$ , on exprime le problème sous la forme du problème de déconvolution suivant :

$$\textbf{(P3)} \quad \underbrace{-\tilde{I}_1 + (\tilde{I}_2 * \underline{h_d})}_{(a)} = \underbrace{a_z * \underline{h_z}}_{(b)} * \underbrace{(\delta - \underline{h_{2d}})}_{(c)}, \quad (2.16)$$

dans lequel (a) est un terme calculé à partir des hologrammes centrés  $\tilde{I}_1$ ,  $\tilde{I}_2$  et de la distance  $d$ , (b) est l'expression de l'amplitude complexe dans le plan de l'hologramme 1 et (c) est un terme dont l'expression analytique est connue. Le problème **(P3)** exprime un problème de reconstruction de phase puisque la seule inconnue est la phase de (b) (l'amplitude du terme (b) est connue :  $I_1 = |a_z * \underline{h_z}|^2$ ).

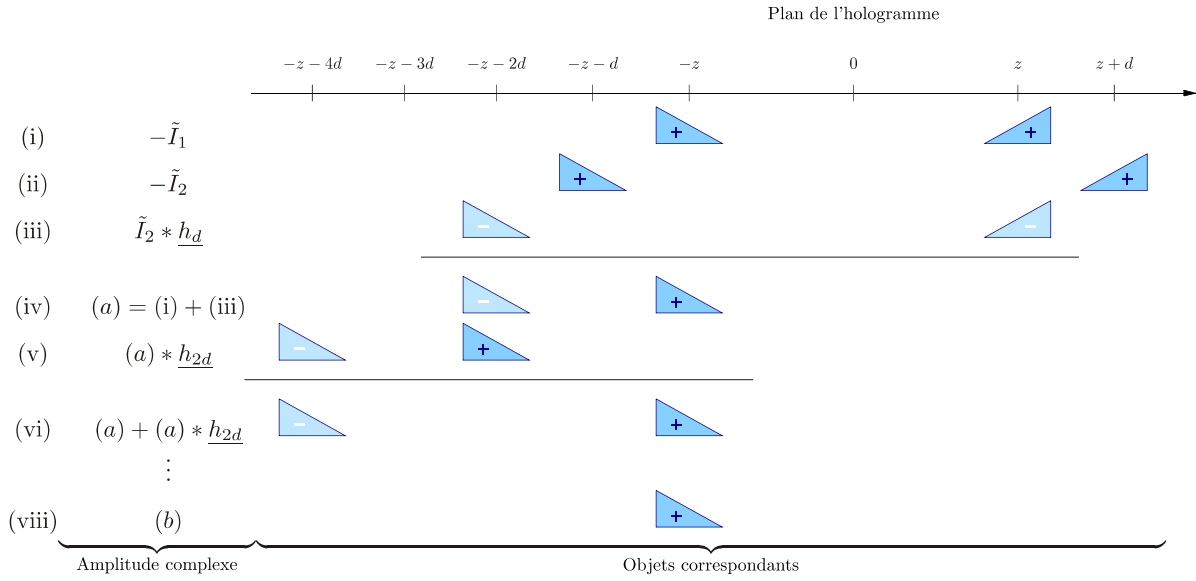
La fonction de transfert du filtre inverse  $F_I^{(P3)}$  s'écrit :

$$\mathcal{F}[F_I^{(P3)}](u, v) = \frac{1}{1 - \exp[2j\pi\lambda d(u^2 + v^2)]}. \quad (2.17)$$

Il se développe sous la forme :

$$F_I^{(P3)} = \delta + \underline{h_{2d}} + \underline{h_{4d}} + \dots + \underline{h_{2nd}}. \quad (2.18)$$

La figure 2.5 illustre l'interprétation physique de la décomposition en série du filtre inverse. Sur chacune des lignes de la figure est représentée l'expression d'une amplitude complexe ainsi que la combinaison d'objets donnant lieu dans le plan de l'hologramme à cette amplitude complexe. Ainsi, aux hologrammes  $I_1$  et  $I_2$  sont associés une paire d'objets (symbolisés par des triangles colorés) : l'objet "réel" correspondant à l'image réelle et l'objet "virtuel" symétrique correspondant à l'image jumelle. Les transformées de Fresnel modélisent une propagation, elle se traduisent donc sur la figure par des



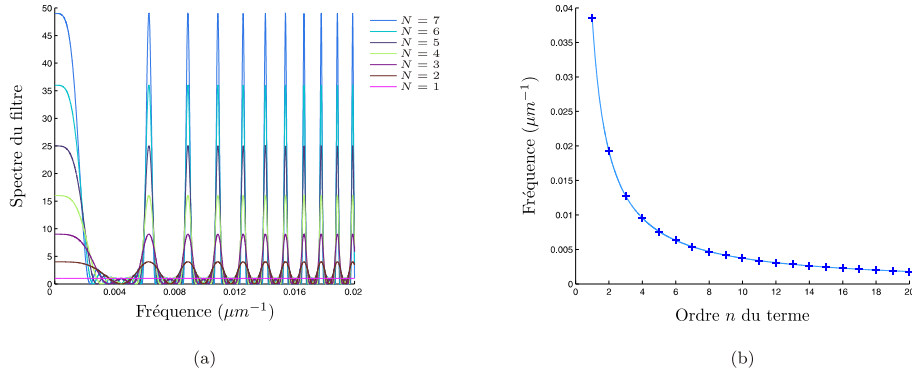
**Fig. 2.5** — Interprétation physique du filtrage inverse : à chacune des amplitudes complexes de la colonne de gauche est associée la combinaison des objets (symbolisés par des triangles colorés) leur donnant naissance dans le plan de l'hologramme. L'intensité enregistrée dans le plan de l'hologramme est ainsi égale à l'amplitude complexe diffractée par l'objet et son symétrique par rapport au plan de l'hologramme. La combinaison de deux hologrammes permet de supprimer les objets symétriques et de repousser de proche en proche l'image défocalisée restante à l'infini.

translations sur l'axe des distances  $z$ . Pour pouvoir supprimer l'objet virtuel à l'aide d'un unique hologramme, il faudrait que l'objet virtuel et l'objet réel puissent s'annuler en se superposant, c'est à dire que les objets soient plans et réels. Dans le cas général d'objets 3D, il faut combiner les deux hologrammes  $I_1$  et  $I_2$  pour faire disparaître les objets virtuels (ligne iii). L'image de l'objet à la distance  $z$  est cependant polluée par la présence d'un second objet situé à la distance  $z+2d$ . Ce second objet peut être repoussé à la distance  $z+4d$  si l'on ajoute  $(a) * \underline{h_{2d}}$  au terme  $(a)$ , puis à la distance  $z+6d$  en ajoutant  $(a) * \underline{h_{4d}}$ . Nous retrouvons ainsi les termes de la série obtenue dans l'équation 2.18.

Plus on prend de termes de la série pour obtenir l'image réelle non bruitée par l'image jumelle, plus le filtre inverse se rapproche du filtre de l'équation 2.17 qui présente des singularités à chaque fois que son dénominateur s'annule. Ce comportement est illustré sur la figure 2.6(a) qui représente le module au carré de la fonction de transfert du filtre inverse défini par les  $N$  premiers termes de la série. Plus le nombre de termes augmente, plus l'allure des spectres tend vers une série de Diracs. Le nombre optimal de termes dépend par conséquent du rapport signal/bruit des hologrammes. La formulation du problème **(P3)** sous la forme d'un problème de reconstruction de phase permet de contrôler la stabilité de l'inversion puisque le module de  $(b)$  est connu.

La limite de l'approche par développement sous forme de série du filtre inverse apparaît lors de l'implémentation numérique du filtrage. Les termes de la suite cor-





**Fig. 2.6** — Spectre du filtre inverse de restitution améliorée basée sur 2 hologrammes : (a) évolution du spectre avec le nombre de termes ; (b) condition d'échantillonnage de chaque terme.

respondent à des fonctions de Fresnel de paramètre  $2nd$  de plus en plus important. Les modulations de la fonction de transfert sont donc de plus en plus rapides et leur échantillonnage pose rapidement problème. Cela limite le nombre de termes de la série utilisables en pratique. La figure 2.6(b) donne la condition d'échantillonnage pour chacun des termes dans le cas de deux hologrammes séparés d'une distance  $d = 30mm$ .

A partir de deux hologrammes d'une même scène, il est également possible d'utiliser des algorithmes itératifs de reconstruction de phase. Nous décrivons cette approche dans la section suivante.

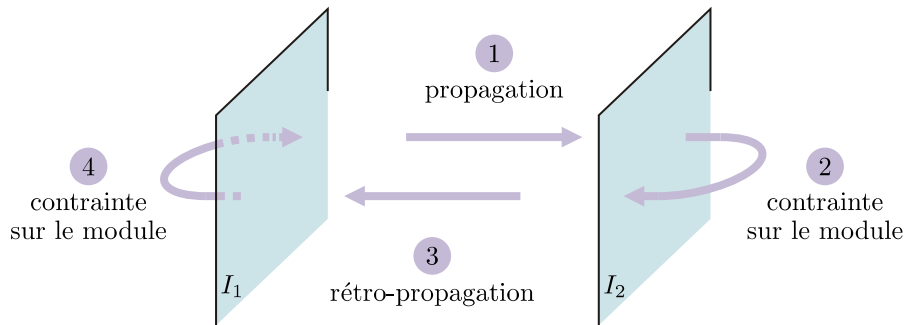
### 2.2.2 Reconstruction de phase

Le problème de reconstruction de phase est un problème général. L'algorithme de Gerchberg-Saxton[GS72, Fie82] permet de reconstruire itérativement la phase à partir de plusieurs mesures de l'intensité d'une grandeur complexe et/ou de sa transformée (de Fourier ou de Fresnel). Il a été appliqué à l'holographie numérique dans les travaux de Liu et Scott[LS87] et plus récemment par Zhang *et al.* [ZPOT03].

Le principe de l'algorithme est simple : si  $I_1 = |\underline{A}_1|^2$  est l'intensité du premier hologramme et  $I_2 = |\underline{A}_2|^2$  l'intensité du second hologramme distant du premier de  $d$ , alors les 4 opérations suivantes sont réalisées itérativement (figure 2.7) :

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \underline{A}_2 \equiv |\underline{A}_2| \exp(j\psi_2) \leftarrow \underline{A}'_1 * h_d, \\
 2 \quad & \underline{A}'_2 \leftarrow \sqrt{I_2} \exp(j\psi_2), \\
 3 \quad & \underline{A}_1 \equiv |\underline{A}_1| \exp(j\psi_1) \leftarrow \underline{A}'_2 * h_{-d}, \\
 4 \quad & \underline{A}'_1 \leftarrow \sqrt{I_1} \exp(j\psi_1).
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

L'initialisation est le plus souvent réalisée en prenant une phase  $\psi_1$  nulle. Ensuite, l'amplitude complexe  $\underline{A}_2$  est estimée par propagation de l'amplitude  $\underline{A}_1$  : étape 1. Puisque dans le second plan l'intensité  $I_2$  a été mesurée le module de l'amplitude  $\underline{A}_2$  est



**Fig. 2.7** — Principe de l'algorithme de reconstruction de phase de Gerchberg-Saxton : 4 étapes sont répétées itérativement : (1) propagation de l'amplitude complexe du plan 1 au plan 2 ; (2) application de la contrainte sur le module ; (3) rétro-propagation du plan 2 au plan 1 ; (4) application de la contrainte sur le module de l'amplitude complexe du plan 1.

connu et l'étape 1 a fourni une première estimation de la phase  $\psi_2$ . Cette contrainte est appliquée : étape 2. L'amplitude complexe  $\underline{A}'_2$  résultante peut alors être rétro-propagée dans le premier plan afin d'obtenir une nouvelle estimation de l'amplitude complexe  $\underline{A}_1$  : étape 3. Enfin, la contrainte donnée par l'intensité mesurée  $I_1$  est appliquée, l'étape 4 fournissant la phase  $\psi_1$  : étape 4.

Notons qu'une version améliorée de l'algorithme de Gerchberg-Saxton a été proposée [YDG<sup>+</sup>94] : l'algorithme de Yang-Gu tient compte du fait que numériquement  $\underline{h}_z * \underline{h}_{-z} \neq \delta$ .

### 2.2.3 Autres techniques

Enfin, d'autres techniques plus marginales ont été proposées. On retiendra notamment l'idée de restituer par blocs un hologramme en ligne afin de simuler un montage hors-axe [LKB99]. Tiller *et al.* ont proposé [TBPN00] de déduire la phase à partir de deux hologrammes enregistrés à des distances proches en se basant sur une interprétation physique de la phase : une transmittance dont la phase varie dévie latéralement une onde lumineuse incidente (principe d'une lentille). Le gradient de la phase peut ainsi être estimé à partir de l'analyse du déplacement de l'intensité d'un plan à l'autre.

### 2.2.4 Conclusion

De nombreux travaux ont été consacrés à la suppression de l'image jumelle. Les techniques basées sur l'obtention de la phase par voie optique n'étant pas adaptées aux contraintes de l'étude de micro-objets en mouvement, nous devons nous tourner vers les approches numériques. Il est apparu à travers la présentation des différentes approches proposées dans la littérature que l'identification du problème de déconvolution sous-jacent permet des analogies et des comparaisons entre des techniques d'apparences différentes (inversion analytique d'une part, algorithmes itératifs d'autre part). Nous avons interprété physiquement les algorithmes de déconvolution utilisés en terme d'opérations dans les demi-espaces réel et jumeau.

Nous n'avons relevé dans la littérature aucun algorithme adapté aux micro-objets répartis *en volume*. Parmi les algorithmes ne nécessitant qu'un seul hologramme, les algorithmes itératifs avec contrainte de support nous semblent les plus adaptés à notre problématique. Nous développons donc dans la partie suivante un algorithme itératif de suppression de l'image jumelle basé sur une contrainte de support *adapté à la nature 3D de nos objets*.

### 3 Débruitage par filtrage non-linéaire d'un hologramme de micro-objets

L'utilisation d'un unique hologramme pour réaliser une restitution sans image jumelle d'un volume 3D de micro-objets ne permet pas de formaliser le problème directement sous la forme d'un problème de déconvolution. Une approche de type algorithme itératif avec contrainte de support est néanmoins possible. Elle s'interprète alors plus facilement dans le cadre du débruitage en ondelettes. La restitution classique (équation 2.8) donne une image bruitée par l'image jumelle. Le bruit d'image jumelle peut-être localisé spatialement par transformée de Fresnel de paramètre opposé. Nous avons rappelé dans le chapitre 1 que la transformée de Fresnel était une transformation d'échelle redondante. Puisque nous avons une transformation d'échelle qui permet à certaines échelles de séparer le bruit du signal, nous pouvons appliquer la technique de seuillage de coefficients d'ondelettes[KTMD99].

Nous décrivons dans le paragraphe suivant l'algorithme que nous proposons pour atténuer l'image jumelle ; nous illustrons ensuite la technique sur des hologrammes simulés puis réels.

#### 3.1 Principe

L'objectif de l'algorithme est de séparer spatialement l'image réelle et l'image virtuelle par masquage. Nous avons illustré en figure 2.3 l'image jumelle apparaissant par restitution d'un hologramme de 3 objets répartis en volume. Les images des objets focalisés sont facilement séparables de leurs images jumelles, par contre, pour l'objet ne se trouvant pas dans son plan de mise au point, il ne semble pas possible de séparer spatialement l'image réelle défocalisée de l'image jumelle. Le traitement d'hologrammes d'objets répartis en volume doit par conséquent être *tridimensionnel*.

La plupart des approches de suppression de l'image jumelle que nous avons décrites dans la partie 2 fournissent un plan restitué débruité. Dans le cas d'un volume d'objets il est indispensable pour des contraintes d'efficacité de débruiter en une fois le volume restitué. Nous construisons donc notre algorithme sous la forme d'une approche mixte de *reconstruction de phase* dans le plan de l'hologramme et de reconstruction itérative avec contrainte de support. Ainsi, une fois la phase reconstruite, un plan quelconque peut être directement restitué sans image jumelle. Nous obtenons donc l'algorithme itératif

de débruitage suivant :

$$\begin{cases} \underline{a}_0^H &= \sqrt{I_H} \\ \underline{a}_n^{(\text{jum})}(z_i) &= (1 - M(z_i)) \cdot (\underline{a}_n^H * \underline{h}_{z_i}) \\ \psi_{n+1} &= \arg\left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \underline{a}_n^{(\text{jum})}(z_i) * \underline{h}_{-z_i}\right) \\ \underline{a}_{n+1}^H &= \sqrt{I_H} \exp(j\psi_{n+1}), \end{cases} \quad (2.20)$$

avec  $(z_1, \dots, z_p)$  les plans issus de l'échantillonnage du volume,  $M$  le masque 3D relatif au support des objets. Nous reviendrons plus tard sur la construction du masque  $M$ . L'algorithme reconstruit itérativement la phase  $\psi$  de l'amplitude complexe  $\underline{a}^H$  dans le plan de l'hologramme  $I_H$ . Pour cela, le bruit est supprimé dans chacun des plans  $\underline{a}^{(\text{jum})}(z_i)$  du demi-espace jumeau.

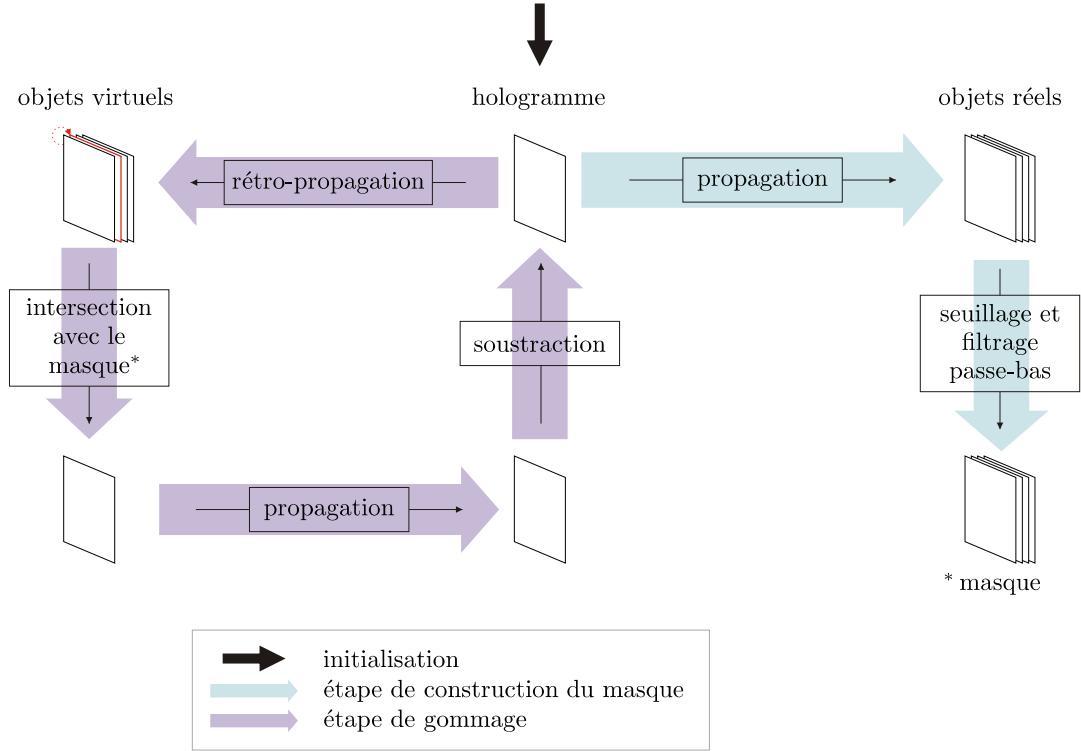
La redondance totale de la transformée de Fresnel est un handicap pour l'efficacité de l'algorithme. En effet, si l'on considère la discrétisation en  $p$  plans du volume étudié et que l'on ne supprime l'image jumelle d'un objet que dans son unique plan de focalisation, alors l'image jumelle ne sera atténuée après recomposition de tous les plans débruités que par un facteur  $(p-1)/p$ . La formulation directe de l'algorithme de seuillage des coefficients de la transformée de Fresnel n'est donc pas exploitable. Au lieu de supprimer le bruit dans les plans transformés, il est possible de supprimer la contribution des objets jumeaux dans le plan de l'hologramme, ce qui revient à reconstruire la phase correspondante dans l'hologramme. On obtient alors l'algorithme modifié ci-dessous, également illustré en figure 2.8 ( $i = 1, \dots, p$ ) :

$$\begin{cases} \underline{a}_0^H &= \sqrt{I_H} \\ \underline{a}_{n(0)}^H &= \underline{a}_n^H \\ \underline{a}_{n(i)}^H &= \underline{a}_{n(i-1)}^H - \left[ M(z_i) \cdot (\underline{a}_{n(i-1)}^H * \underline{h}_{z_i}) \right] * \underline{h}_{-z_i} \\ \psi_{n+1} &= \arg\left(\underline{a}_{n(p)}^H\right) \\ \underline{a}_{n+1}^H &= \sqrt{I_H} \exp(j\psi_{n+1}). \end{cases} \quad (2.21)$$

Cette fois-ci, l'amplitude complexe dans le plan de l'hologramme  $\underline{a}^H$  est modifiée  $p$  fois par itération puisque la contribution dans le plan de l'hologramme  $\left[ M(z_i) \cdot (\underline{a}_{n(i-1)}^H * \underline{h}_{z_i}) \right] * \underline{h}_{-z_i}$  des objets jumeaux situés dans le plan  $z_i$  est retranchée ("gommée") à l'amplitude complexe  $\underline{a}^H$ . Puisque le gommage d'un objet virtuel en  $-z_i$  est immédiatement répercuté sur l'amplitude complexe  $\underline{a}^H$  avant traitement du plan suivant  $z_{i+1}$ , il n'y a pas de risque de suppressions multiples pour les objets présents dans plusieurs plans du masque  $M$ .

### 3.2 Gommage itératif

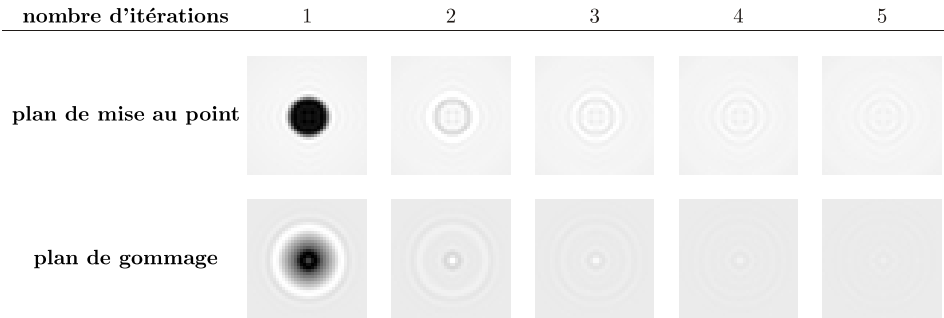
Le masque  $M$  est construit par segmentation du demi-espace réel. Il peut être construit avant de commencer l'algorithme 2.21 ou être mis à jour en cours d'algorithme.



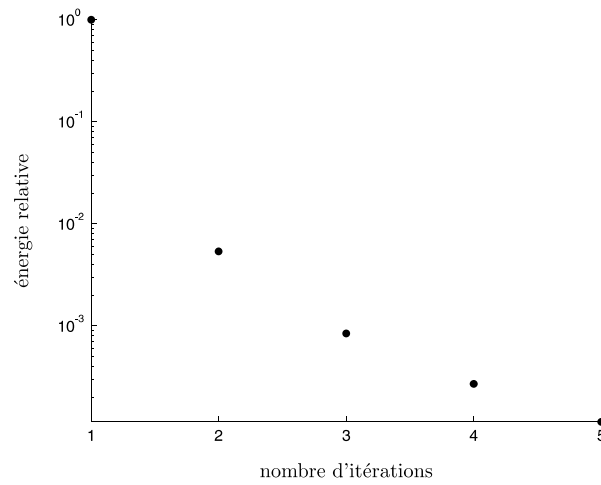
**Fig. 2.8** — Schéma de l'algorithme de reconstruction de phase par gommage itératif des objets virtuels.

En cas de sous-segmentation (i.e. non détection de certains micro-objets) la suppression de l'image jumelle sera moins efficace puisque les images jumelles associées aux objets non détectés seront toujours présentes. Nous allons montrer que l'échantillonnage en  $z$  peut être lâche.

Afin de limiter les contraintes sur la qualité de la segmentation et pour réduire l'échantillonnage en  $z$  nous proposons de filtrer passe-bas (filtre gaussien  $11 \times 11$  d'écart-type 2 pixels) le masque binaire obtenu par segmentation suivie d'une dilatation par un disque de quelques pixels de diamètre. Ainsi il sera possible de gommer un objet en léger défaut de mise au point et une segmentation de mauvaise qualité n'introduira pas de frontières brusques (amplifiées par transformée de Fresnel). Le résultat du gommage d'une particule en défaut de mise au point est illustré en figure 2.9. Un hologramme d'une particule de  $90\mu m$  de diamètre située à  $120mm$  a été simulé. Le plan de gommage est situé à  $2mm$  du plan de focalisation. L'objet virtuel est efficacement supprimé en quelques itérations. L'évolution de l'énergie relative de la particule virtuelle (définie comme le rapport entre l'intensité de l'amplitude complexe dans le plan de mise au point après et avant gommage) est présentée en figure 2.10. La décroissance de l'énergie est rapide, ce qui traduit un gommage efficace. Nous avons constaté en pratique une suppression satisfaisante de l'image jumelle en moins de 10 itérations sur les hologrammes présentés dans la section suivante.



**Fig. 2.9** — Gommage de l'image virtuelle d'une particule : évolution dans le plan de mise au point de l'image virtuelle et dans le plan de gommage, distant de  $2mm$ .

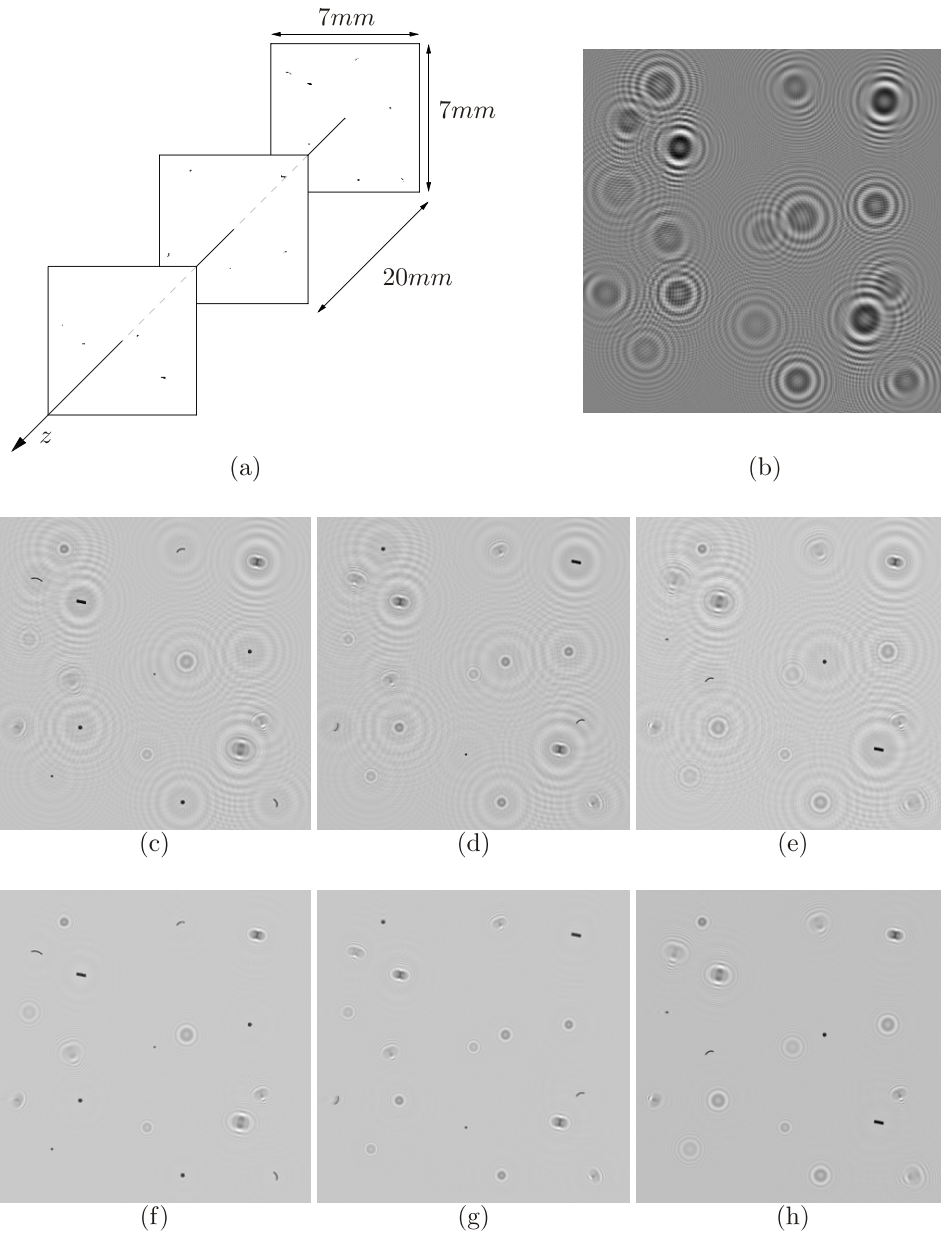


**Fig. 2.10** — Évolution de l'énergie de l'image jumelle de la particule gommée en figure 2.9.

### 3.3 Illustrations

Nous illustrons l'algorithme sur 3 exemples : un volume 3D synthétique de grande profondeur destiné à mettre en évidence l'adaptation de l'algorithme à la nature 3D des objets ; une simulation d'un nuage de micro-particules pour lequel les rapports signal/bruit pourront facilement être calculés ; enfin un hologramme expérimental de gouttelettes d'eau.

**Hologramme simulé d'un volume 3D simple de micro-objets** Les objets étudiés sont situés dans 3 plans distants les uns des autres de  $20mm$ . L'hologramme simulé est situé à  $100mm$  du plan le plus proche. La figure 2.11(a) donne une représentation schématique des objets. L'hologramme simulé est représenté en figure 2.11(b). Les plans restitués par l'algorithme classique sont illustrée en figure 2.11(c) à 2.11(e). Les plans restitués après reconstruction de la phase de l'hologramme par l'algorithme 2.21 sont représentés en figure 2.11(f) à 2.11(h). La suppression de l'image jumelle est très efficace sur cet exemple simple.



**Fig. 2.11** — Résultat de la technique de gommage de l'image jumelle sur un objet synthétique 3D : (a) objet synthétique formé de 3 plans binaires ; (b) hologramme de l'objet (a) simulé numériquement ; (c) à (e) plans restitués numériquement sans gommage de l'image jumelle ; (f) à (h) plans restitués après suppression de l'image jumelle par gommage.

**Hologramme simulé d'un volume 3D de particules** Une centaine de particules (sphères opaques de  $90\mu m$  de diamètre) ont été réparties aléatoirement dans un volume  $6 \times 6 \times 6 mm^3$ . Un hologramme du volume a été simulé à la distance  $z = 120 mm$ . Il est représenté en figure 2.12(a). Un plan restitué classiquement et un plan restitué après reconstruction de phase sont représentés en figure 2.12(b) et 2.12(c) respectivement. 5 plans de gommage ont été utilisés dans l'algorithme 2.21. La figure 2.12(d) présente le rapport signal sur bruit dans chacun des plans avant (courbe bleue) et après débruitage (courbe rouge). Les rapports signal sur bruit ont pu être obtenus en prenant comme valeur du signal les plans restitués en utilisant la valeur théorique de la phase disponible en simulation. Si l'on note  $I_{R_z}^{(th)}$  l'intensité "théorique" (celle calculée avec la phase exacte) et  $I_{R_z}^{(calc)}$  l'intensité obtenue par un algorithme de restitution, alors le rapport signal sur bruit que

nous avons représenté s'écrit :  $RSB = 10 \log_{10} \left\{ \frac{1}{N} \sum_x \sum_y \left[ \frac{I_{R_z}^{(th)}(x,y)}{I_{R_z}^{(th)}(x,y) - I_{R_z}^{(calc)}(x,y)} \right]^2 \right\}$  avec

$N$  le nombre de pixels. La suppression de l'image jumelle s'est traduite dans cette simulation par une amélioration du rapport signal sur bruit de 10dB.

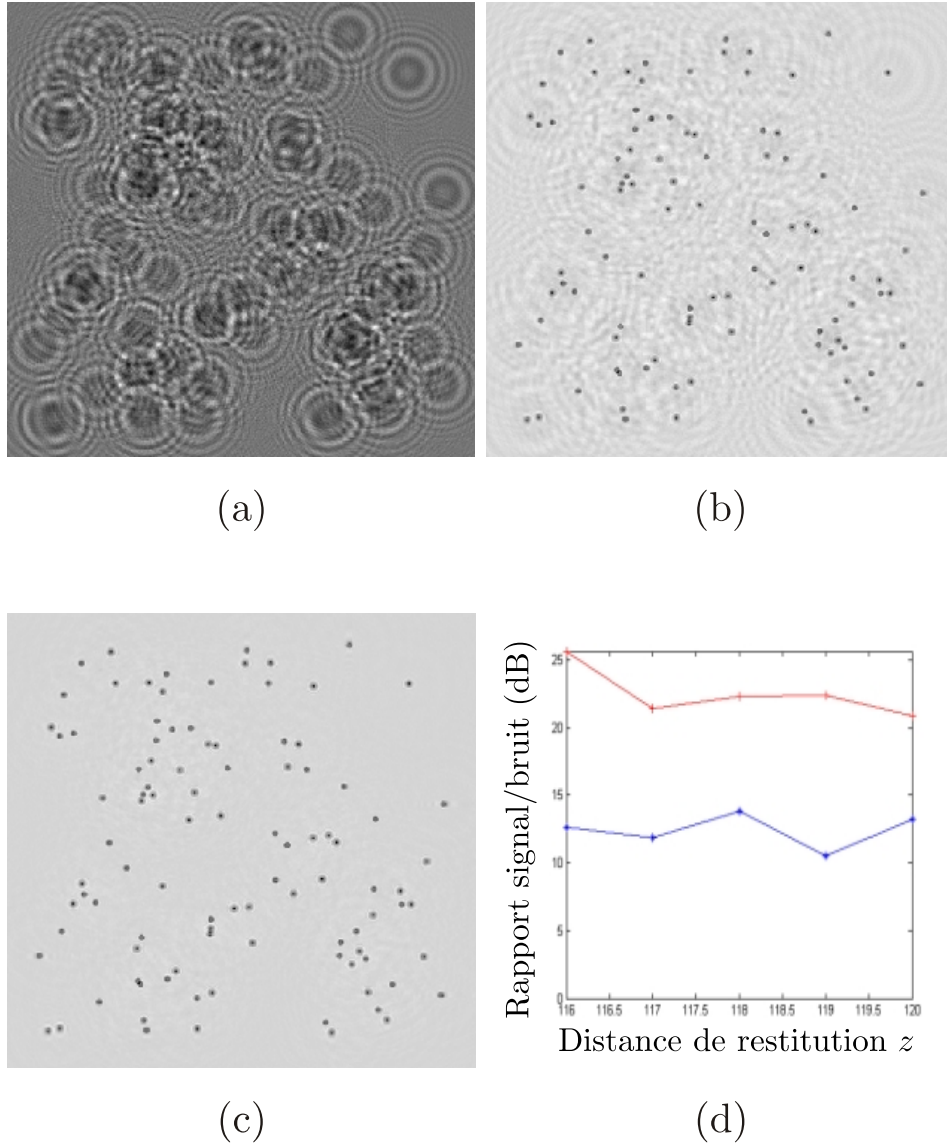
**Hologramme expérimental d'un nuage de gouttelettes** Un nuage de gouttelettes d'eau générées par un vaporisateur a été éclairé par un laser YAG pulsé ( $\lambda = 532 nm$ , durée de l'impulsion :  $7 ns$ ). L'hologramme  $1024 \times 1280$  pixels est illustré en figure 2.13(a). Les gouttelettes sont situées dans un volume de  $60 mm$  de profondeur. Leur diamètre moyen est  $90\mu m$ . Une reconstruction classique est illustrée en figure 2.13(b). Le même plan restitué après gommage des particules jumelles est représenté en figure 2.13(c). Les images jumelles sont fortement atténuées. L'algorithme proposé semble donc robuste au bruit inhérent à l'acquisition.

## 4 Conclusion

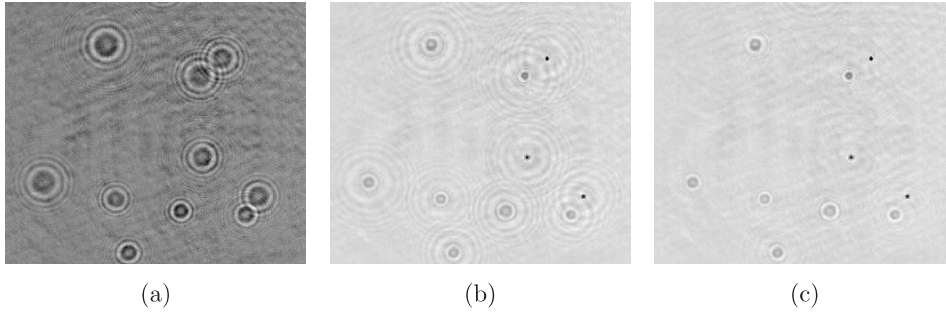
L'image jumelle est inhérente au montage d'holographie en ligne. L'intensité enregistrée sous la forme d'un hologramme peut s'interpréter optiquement comme résultant de la diffraction d'une paire formée de l'ensemble des objets et de l'ensemble symétrique par rapport à l'hologramme. Nous avons présenté un état de l'art des techniques de suppression de l'image jumelle. Les techniques numériques tentent soit de reconstruire la phase de l'hologramme, soit d'inverser le processus d'acquisition de l'hologramme, ce qui se traduit dans le cas d'un objet réel plan par un problème de déconvolution. De nombreux liens ont été mis en évidence entre les différentes approches de suppression de l'image jumelle par identification avec les techniques de déconvolution.

Il est apparu que les travaux existants ne permettaient pas de traiter directement des hologrammes d'objets répartis en volume. Nous avons donc proposé un algorithme adapté à notre problématique. Cet algorithme appartient aux approches itératives avec contrainte de support. Les illustrations de l'algorithme sur des hologrammes simulés puis réel indiquent une bonne efficacité de l'algorithme. Cet algorithme peut être appliqué au-delà de la suppression de l'image jumelle à de la vélocimétrie par image de particules





**Fig. 2.12** — Application de la technique de gommage sur un hologramme simulé de micro-particules : (a) hologramme ; (b) plan restitué au milieu du nuage de particules ; (c) plan restitué à la même distance que (b) après gommage de l'image jumelle ; (d) évolution du rapport signal sur bruit sans débruitage (courbe bleue) et avec débruitage (courbe rouge).



**Fig. 2.13** — Application de la technique de gommage de l'image jumelle à un hologramme expérimental de gouttelettes : (a) hologramme ; (b) restitution classique ; (c) restitution après reconstruction de phase par l'algorithme de gommage.

par une approche de type “reconstruction par marqueur” inspirée de la morphologie mathématique[DFFD06].

Débruitage et segmentation apparaissent comme deux processus indissociables. La nature fondamentalement discrète de nos objets (le volume est entièrement vide à l'exception de micro-objets) nous pousse à utiliser une approche adaptée à cette spécificité. Nous proposons par conséquent dans le chapitre suivant de traiter simultanément les deux problèmes en empruntant une voie inspirée d'une technique de déconvolution classiquement utilisée en radio-astronomie : l'algorithme CLEAN[Hög74, SPM02]. La formulation du problème de segmentation comme un problème inverse nous permettra de dépasser les limitations qu'imposent les effets de troncature dus au support limité de l'hologramme. Nous étendrons la notion de gommage d'objets que nous avons introduite dans l'algorithme de suppression de l'image jumelle au gommage des objets segmentés afin d'améliorer au fur et à mesure du traitement le rapport signal sur bruit dans l'hologramme.



# Approche “problème inverse” pour la détection de micro-particules

---

*Nous traitons dans ce chapitre le problème de la détection de micro-particules dans un hologramme. Une modélisation du problème sous la forme d’un problème inverse nous permet de nous affranchir des limites de l’approche classique de détection. Nous décrivons un algorithme itératif, réalisant en trois étapes la détection d’une gouttelette. L’algorithme est appliqué sur des hologrammes simulés puis sur une série d’hologrammes expérimentaux d’un jet rectiligne de gouttelettes d’eau. Les résultats obtenus sur des hologrammes expérimentaux indiquent une amélioration importante de la résolution par rapport aux techniques classiques ainsi que la possibilité d’étendre la taille du champ d’étude au-delà des bords de l’hologramme.*

---

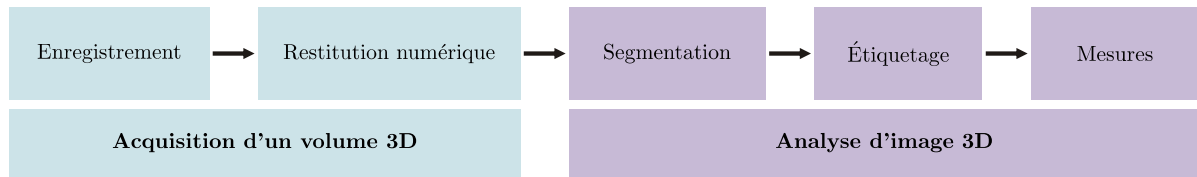
*Ce chapitre s’appuie sur les articles [SDF<sup>+</sup> 06, FGM<sup>+</sup> 06].  
L’algorithme décrit a été proposé par Éric Thiébaud et développé et mis au point avec Ferréol Soulez*

## 1 Modélisation du problème de détection de micro-particules

Après avoir décrit les limites de l’approche classique de détection de micro-particules, nous formaliserons ce problème de détection sous la forme d’un problème inverse.

### 1.1 Limites de l’approche classique

L’approche classique du problème de détection de micro-particules consiste à intégrer le système d’acquisition + restitution numérique d’hologramme au début d’une chaîne de traitement de l’image 3D (figure 3.1).



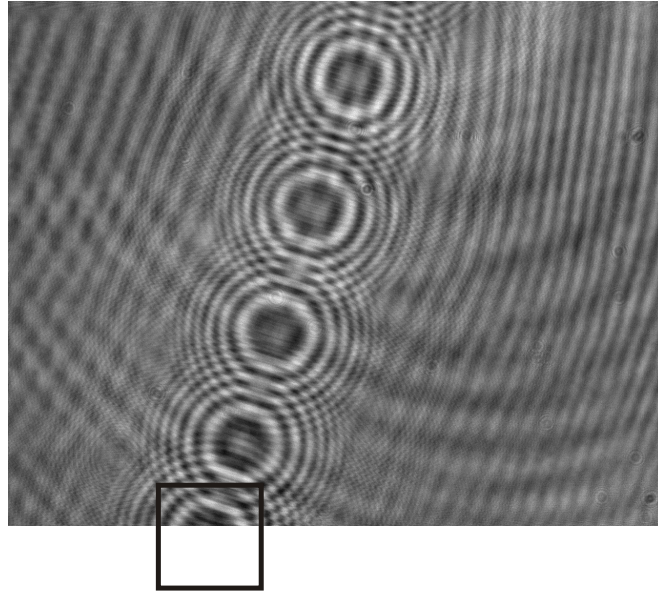
**Fig. 3.1** — Chaîne de traitement classiquement utilisée pour détecter et mesurer la position 3D et le diamètre de micro-particules.

Les images 3D obtenues en sortie du système d’holographie numérique souffrent de plusieurs défauts. Nous avons étudié en détail dans le chapitre précédent le problème de l’image jumelle. Un défaut particulièrement pénalisant dans une perspective de métrologie est l’apparition d’artefacts dans les images 3D restituées dus à la troncature de l’hologramme. L’enregistrement directement sur une caméra numérique limite la taille de l’hologramme à la taille du capteur CCD<sup>1</sup> ce qui représente une surface cent fois plus faible par rapport à un hologramme enregistré sur une plaque holographique. De nombreuses franges d’interférence sont donc tronquées par les bords du capteur. Lors de la restitution numérique, l’absence des franges hors du support de l’hologramme est à l’origine d’artefacts. La figure 3.2 illustre sur un hologramme expérimental de gouttelettes d’eau la déformation de l’image restituée d’une gouttelette située en bord de capteur. Ces phénomènes causent un biais sur les mesures de localisation 3D et de diamètre réalisées sur les images 3D restituées.

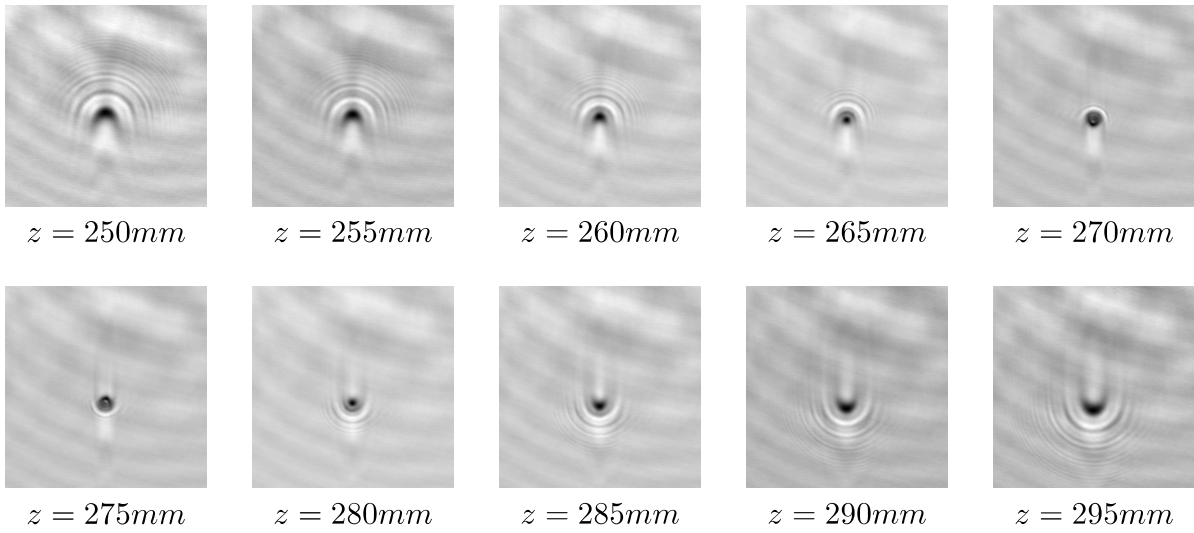
L’information de position et taille d’une micro-particule est délocalisée sur tout l’hologramme. Ainsi, des micro-particules situées hors du champ du capteur donnent sur l’hologramme des franges de plus faible contraste et surtout sévèrement tronquées. Cette information, bien que présente dans le signal, n’est pas exploitable sur les images 3D restituées car l’approche d’analyse par transformée de Fresnel, basée sur une convolution, nécessite de prolonger l’hologramme par une valeur constante (0-padding) pour obtenir une image des objets hors champ. Le contraste des images restituées hors champ est très faible et les artefacts décrits en figure 3.2 très marqués.

Il a été montré par Fournier *et al.* que la transformée de Fresnel d’un hologramme de micro-particules pouvait donner lieu à de multiples maximums en fonction des paramètres d’enregistrement de l’hologramme [FDF04]. Ce phénomène est lié à la modulation d’amplitude des anneaux de diffraction d’une particule (figure 1.7) : lorsque le signal modulant est négatif, les anneaux de diffraction sont en opposition de phase par rapport à ceux d’une fonction de Fresnel non modulée en amplitude. Le maximum de la transformée de Fresnel est atteint aux distances pour lesquelles fonction de Fresnel et anneaux de diffraction se corrélaient, ce qui se produit lorsque les fonctions de Fresnel d’enregistrement et de restitution sont identiques mais aussi lorsque les anneaux de diffraction en opposition de phase sont bien corrélés avec la fonction de Fresnel de restitution. Ce phénomène de pics multiples (le plus souvent un double pic) peut être

<sup>1</sup>soit environ  $60\text{mm}^2$  pour la caméra PCO Sensicam utilisée pour réaliser les hologrammes présentés dans ce manuscrit



(a)



(b)

**Fig. 3.2** — Illustration des artefacts apparaissant lors de la restitution numérique à cause de la troncature des anneaux de diffraction en bord d'hologramme : (a) hologramme expérimental de gouttelettes, traité ensuite dans la section 3 ; (b) restitutions numériques à différentes profondeurs  $z$ . Les images représentées en (b) correspondent à la zone carrée figurée en bord de champ sur l'hologramme (a).

gênant pour la segmentation de l'image 3D restituée.

Les artefacts apparaissant dans les images 3D restituées : images jumelles, effets liés au fenêtrage de l'hologramme, doubles pics, nous poussent à exprimer le problème de détection de micro-particules non pas dans le volume 3D restitué mais directement sur l'hologramme. Nous considérons alors le problème sous la forme d'un problème inverse.

## 1.2 Problème direct

Étant donné un ensemble de micro-particules défini par les paramètres  $\mathcal{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$  des  $N$  particules, il est facile de calculer l'intensité d'un hologramme enregistré à la distance  $z$ . Nous avons effectivement établi au chapitre 1 (section 4.1) l'expression d'un hologramme de micro-objets. Dans le cas de micro-particules, l'ouverture  $\vartheta_i$  est un disque. L'amplitude complexe diffractée par la particule  $i$  à la distance  $z_i$  s'écrit[TT76] :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\mathbf{p}_i}(x, y) &= \underline{A}_{z_i, D_i}(x - x_i, y - y_i) \\ \text{avec } \underline{A}_{z_i, D_i}(x, y) &= \frac{D_i \lambda z_i}{4\sqrt{x^2 + y^2}} J_1\left(\frac{4\pi D_i \sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda z_i}\right) \cdot \underline{h}_{z_i}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Le vecteur de paramètres définissant la particule  $i$  est  $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i, z_i, D_i)$ . L'intensité de l'hologramme de l'ensemble des particules s'écrit :

$$I_{\mathcal{P}}(x, y) \propto \left| 1 - \sum_{i=1}^N \underline{A}_{\mathbf{p}_i}(x, y) \right|^2. \quad (3.2)$$

Cette relation prend en compte les interférences entre les figures de diffraction des différentes particules.

La figure de diffraction générée par la particule  $i$  sur l'hologramme s'exprime dans l'approximation linéaire valable pour les petits objets :

$$I_{\mathbf{p}_i}(x, y) = I_{z_i, D_i}(x - x_i, y - y_i) \propto \Re \left( \underline{A}_{D_i, z_i}(x - x_i, y - y_i) \right). \quad (3.3)$$

$I_{\mathbf{p}_i}$  est le modèle du signal de la particule  $i$  dans l'hologramme. Les interférences avec les autres particules sont négligées dans le modèle  $I_{\mathbf{p}_i}$ .

## 1.3 Problème inverse

Retrouver l'ensemble des paramètres  $\mathcal{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N)$  des  $N$  particules à partir de leur hologramme  $I_H$  est un problème beaucoup plus difficile que le problème direct décrit ci-dessus. L'ensemble statistiquement le plus significatif est celui minimisant la fonction de coût  $\mathcal{C}(\mathcal{P})$  des moindres carrés pondérés<sup>2</sup>[Tar05] :

$$\mathcal{C}(\mathcal{P}) = \sum_x \sum_y W(x, y) \cdot [I_H(x, y) - I_{\mathcal{P}}(x, y)]^2, \quad (3.4)$$

---

<sup>2</sup>cette expression correspond à l'estimation du maximum de vraisemblance sous l'hypothèse de données  $I_H(x, y)$  bruitées par un bruit blanc gaussien centré de variance  $1/W(x, y)$ .

$W$  est une matrice de pondération qui prend une valeur  $W(x, y)$  nulle quand le point  $(x, y)$  est hors du support de l'hologramme  $I_H$  et égale à 1 dans le support de l'hologramme. Ce masque permet de prendre en compte l'effet de troncature des systèmes d'anneaux de diffraction qu'impose le support limité du capteur. Dans le cas de la présence de pixels saturés ou de zones d'ombres sur le capteur, l'influence de ces pixels peut être supprimée en annulant les valeurs correspondantes dans la matrice  $W$ .

Le problème de détection des micro-particules s'exprime alors comme un problème d'optimisation :

$$\mathcal{P}^{(\text{opt})} = \arg \min_{\mathcal{P}} \mathcal{C}(\mathcal{P}). \quad (3.5)$$

Ce problème possède de nombreux minimums locaux, il est donc nécessaire de concevoir un algorithme capable de s'approcher du minimum global de  $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ .

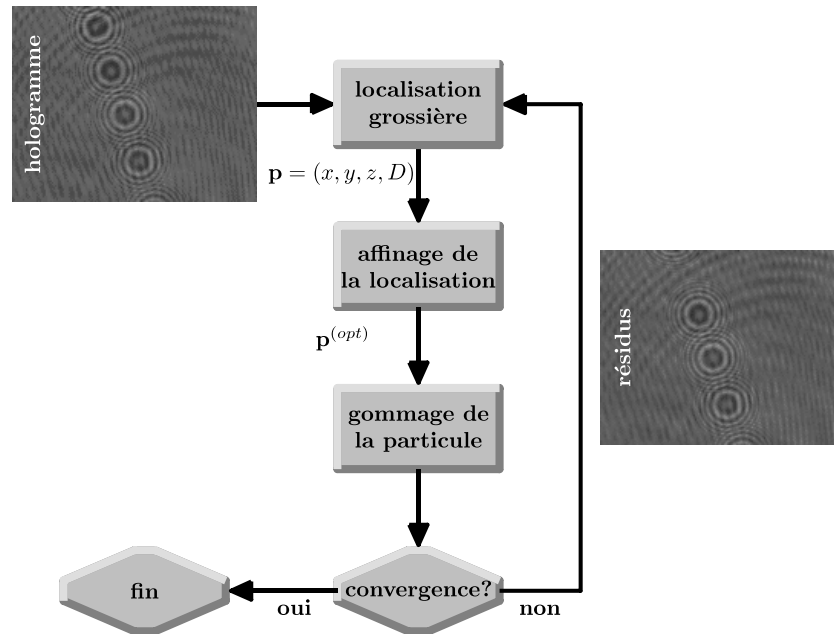


## 2 Principe de l’algorithme

Nous proposons de tenter de résoudre le problème d’optimisation de l’équation 3.5 par une procédure itérative composée de trois étapes (figure 3.3) :

- recherche de la position  $(x_p, y_p, z_p)$  de la particule dont la figure de diffraction est la plus importante sur l’hologramme,
- affinage de la localisation de cette particule,
- gommage de la figure de diffraction associée à la particule détectée.

La première étape est réalisée par recherche exhaustive dans l’espace des paramètres  $(x_p, y_p, z_p)$  de la position minimisant le coût  $\mathcal{C}$  (section 2.1). L’amélioration de la localisation est ensuite obtenue par optimisation locale du vecteur de paramètres  $\mathbf{p} = (x_p, y_p, z_p, D_p)$  (section 2.2). Lorsqu’une particule aura été ainsi localisée, nous retrancherons sa contribution dans l’hologramme  $I_H$  (section 2.3) afin d’éviter le risque de détections multiples et pour améliorer le rapport signal/bruit. Cette démarche est inspirée de l’algorithme CLEAN[Hög74] utilisé en radio-astronomie pour la détection de sources ponctuelles dans des données dans lesquelles les réponses de chacune des sources par le système sont des taches se superposant. La procédure CLEAN consiste alors à détecter la tache correspondant à la source la plus énergétique, à retrancher sa contribution par ajustement d’un modèle de la PSF du système et à poursuivre l’analyse sur les données résiduelles. On peut voir cet algorithme comme un algorithme de déconvolution selon une approche discrète, ce qui correspond bien à la nature fondamentalement discrète de notre problème.



**Fig. 3.3** — Schéma de principe de l’algorithme de détection de micro-particules (d’après [SDF<sup>+</sup>06]).

## 2.1 Localisation grossière

Pour détecter une particule dans l'hologramme, on recherche le modèle de la figure de diffraction d'une particule  $I_{\mathbf{p}}(x, y)$  dans le signal enregistré : on cherche le vecteur de paramètres  $\mathbf{p} = (x_p, y_p, z_p, D_p)$  qui permet d'expliquer au mieux l'hologramme  $I_H$ .  $\mathbf{p}^{(\text{opt})}$  s'exprime donc comme étant le vecteur de paramètres minimisant le coût  $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \alpha, \beta)$  :

$$\mathbf{p}^{(\text{opt})} = \arg \min_{\mathbf{p}} \left[ \min_{\alpha, \beta} \mathcal{C}(\mathbf{p}, \alpha, \beta) \right] \quad (3.6)$$

où  $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \alpha, \beta) = \sum_x \sum_y W(x, y) \cdot [I_H(x, y) - \alpha I_{\mathbf{p}}(x, y) + \beta]^2$ ,

avec  $\alpha$  un réel positif et  $\beta$  un réel quelconque. Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  apparaissent lors de l'ajustement linéaire de  $I_H$  et  $I_{\mathbf{p}}$ .  $\alpha$  rend compte de l'énergie reçue sur le capteur. Cette énergie dépend notamment de l'énergie incidente reçue par la particule et peut varier à cause de l'inhomogénéité de l'onde plane incidente ou parce que la particule se trouve dans le cône de diffraction d'autres particules.  $\beta$  est un offset représentant principalement la composante continue (partie de l'onde incidente non diffractée par les particules).

### Détermination des valeurs $\alpha$ et $\beta$ optimales

La valeur  $\beta^+$  qui minimise le coût  $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \alpha, \beta)$  vérifie :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{C}(\mathbf{p}, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \right|_{\beta^+} = 0, \quad (3.7)$$

soit

$$2\beta^+ \sum_x \sum_y W(x, y) + 2 \sum_x \sum_y W(x, y) I_H(x, y) - 2\alpha \sum_x \sum_y W(x, y) I_{\mathbf{p}}(x, y) = 0.$$

Si  $I_H$  a été centré de sorte que  $\sum_x \sum_y W(x, y) I_H(x, y) = 0$ , l'expression de  $\beta^+$  se simplifie en :

$$\beta^+ = \alpha \frac{\sum_x \sum_y W(x, y) I_{\mathbf{p}}(x, y)}{\sum_x \sum_y W(x, y)}. \quad (3.8)$$

Afin d’alléger l’écriture des prochaines équations, nous noterons les sommes sous la forme compacte suivante :

$$\begin{aligned}
S_W &= \sum_x \sum_y W(x, y), \\
S_{WI_{\mathbf{p}}} &= \sum_x \sum_y W(x, y) I_{\mathbf{p}}(x, y), \\
S_{WI_H} &= \sum_x \sum_y W(x, y) I_H(x, y), \\
S_{WI_H I_{\mathbf{p}}} &= \sum_x \sum_y W(x, y) I_H(x, y) I_{\mathbf{p}}(x, y), \\
S_{WI_{\mathbf{p}}^2} &= \sum_x \sum_y W(x, y) [I_{\mathbf{p}}(x, y)]^2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Avec ces nouvelles notations,  $\beta^+$  s’écrit :

$$\beta^+ = \alpha \frac{S_{WI_{\mathbf{p}}}}{S_W} \tag{3.10}$$

et le coût devient, lorsque  $\beta = \beta^+$  :

$$\mathcal{C}(\mathbf{p}, \alpha, \beta^+) = \sum_x \sum_y W(x, y) \cdot \left[ I_H(x, y) - \alpha \left( I_{\mathbf{p}}(x, y) - \frac{S_{WI_{\mathbf{p}}}}{S_W} \right) \right]^2. \tag{3.11}$$

La valeur de  $\alpha$  qui minimise l’expression du coût donnée à l’équation 3.11 vérifie :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{C}(\mathbf{p}, \alpha, \beta^+)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha^+} = 0$$

ce qui conduit pour un hologramme centré ( $S_{WI_H} = 0$ ) à la valeur optimale de  $\alpha$  suivante :

$$\alpha^+ = \frac{S_{WI_H I_{\mathbf{p}}}}{S_{WI_{\mathbf{p}}^2} - \frac{(S_{WI_{\mathbf{p}}})^2}{S_W}}. \tag{3.12}$$

Pour que la particule détectée ait un sens physique, on doit avoir  $\alpha \geq 0$  sinon la particule émettrait de l’énergie au lieu d’en absorber. On retiendra donc la valeur  $\alpha = \max(0, \alpha^+)$ .

### Expression du coût minimum

Lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  atteignent leur valeur optimale, le coût s’exprime après simplifications :

$$\mathcal{C}(\mathbf{p}, \alpha, \beta)|_{\alpha=\max(0, \alpha^+), \beta=\beta^+} = \begin{cases} S_{WI_H^2} - \frac{(S_{WI_H I_{\mathbf{p}}})^2}{S_{WI_{\mathbf{p}}^2} - \frac{(S_{WI_{\mathbf{p}}})^2}{S_W}} & \text{si } \alpha^+ > 0, \\ S_{WI_H^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le vecteur de paramètres  $\mathbf{p}^{(\text{opt})}$  minimise le coût et maximise donc ( $S_{WI_H^2}$  étant constant) le terme :

$$\frac{(S_{WI_H I_P})^2}{S_{WI_P^2} - \frac{(S_{WI_P})^2}{S_W}} \quad (3.13)$$

sous la contrainte  $\alpha^+ > 0$ .

### Implémentation

Si  $F$  est une fonction de  $x$  et de  $y$ , alors :

$$\begin{aligned} \sum_x \sum_y F(x, y) I_P(x, y) &= \sum_x \sum_y F(x, y) I_{z_p, D_p}(x - x_p, y - y_p), \\ &= \sum_x \sum_y F(x, y) I_{z_p, D_p}(x_p - x, y_p - y) \text{ car } I_{z_p, D_p} \text{ est symétrique,} \\ &= F(x, y) *_{(x_p, y_p)} I_{z_p, D_p}(x, y), \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec  $*$  désignant le produit de convolution discret 2D.

Il est donc possible d'exprimer le terme 3.13 à maximiser par le vecteur de paramètres en faisant apparaître des produits de convolution :

$$\frac{\{[W \cdot I_H] * I_{z_p, D_p}\}^2}{W * [I_{z_p, D_p}]^2 - \frac{1}{S_W} [W * I_{z_p, D_p}]^2}, \quad (3.15)$$

sous la contrainte :

$$\frac{[W \cdot I_H] * I_{z_p, D_p}}{W * [I_{z_p, D_p}]^2 - \frac{1}{S_W} [W * I_{z_p, D_p}]^2} > 0. \quad (3.16)$$

Si  $D_p$  est fixé (connu *a priori* ou estimé par la technique décrite dans le chapitre 4), alors il est possible d'explorer l'espace 3D des paramètres  $x_p$ ,  $y_p$  et  $z_p$  à la recherche de la position du maximum du terme 3.15, position devant vérifier la contrainte 3.16. Numériquement, les produits de convolution peuvent être calculés à l'aide de l'algorithme FFT (coût de 7 FFTs par plan si aucun pré-calcul n'est disponible en mémoire). Il est ainsi possible de construire rapidement un volume discret afin de chercher la position la plus probable d'une particule.

Contrairement à l'analyse du volume 3D restitué numériquement, cette approche correspond sous l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien centré à une *détection optimale* du modèle de la figure de diffraction d'une particule dans l'hologramme (approche filtrage optimal décrite dans le chapitre 1, section 4.3). Le bruit, composé principalement<sup>3</sup> des systèmes d'anneaux des autres particules que celle en cours de détection, n'est cependant pas blanc. Ce bruit ne peut pas être blanchi par une approche fréquentielle car il a même

<sup>3</sup>à faible concentration, les franges parasites dues à la lame protectrice du CCD composent également une part importante du bruit.

spectre que le signal (propriété des spectres décrite dans le paragraphe 2.2). L’action de gommage réalisée après la détection d’un système d’anneaux produit un blanchiment progressif au fur et à mesure de la détection. Ainsi, bien que l’hypothèse d’un bruit blanc gaussien centré ne soit pas vérifiée, cette étape de détection est efficace.

La normalisation introduite par la matrice de pondération  $W$  permet de prendre correctement en compte la troncature des figures de diffraction hors du support de l’hologramme (sans nécessiter d’hypothèse de prolongement de l’hologramme hors de son support).

Une coupe du coût  $\mathcal{C}$  dans un plan  $(x_p, y_p)$  est représentée en figure 3.4 pour l’hologramme de la figure 3.5(a). L’image présentée est le résultat de la composition de trois images. La partie centrale (zone ①), de la taille de l’hologramme, correspond au coût calculé sur l’hologramme. La zone ② correspond au coût calculé sur l’hologramme après gommage des quatre premières particules détectées (les particules de la zone ①). Enfin, la zone ③ a été obtenue par calcul du coût sur l’hologramme résiduel après gommage des 6 premières particules détectées. Alors que seules 4 particules se trouvent dans le champ de l’hologramme, le calcul du coût permet la détection de 9 particules sur une zone totale correspondant à un doublement de la taille de l’hologramme.

## 2.2 Optimisation locale

Les paramètres  $x_p$ ,  $y_p$  et  $z_p$  obtenus par exploration de l’espace des paramètres (section précédente) donnent avec  $D_p$  (connu ou estimé *a priori*) un vecteur de paramètre  $\mathbf{p}$  proche de  $\mathbf{p}^{(\text{opt})}$ . Nous pouvons chercher  $\mathbf{p}^{(\text{opt})}$  par une technique d’optimisation locale minimisant le coût  $\mathcal{C}(\mathbf{p}, \alpha, \beta)$  défini à l’équation 3.6.

### Re-paramétrisation

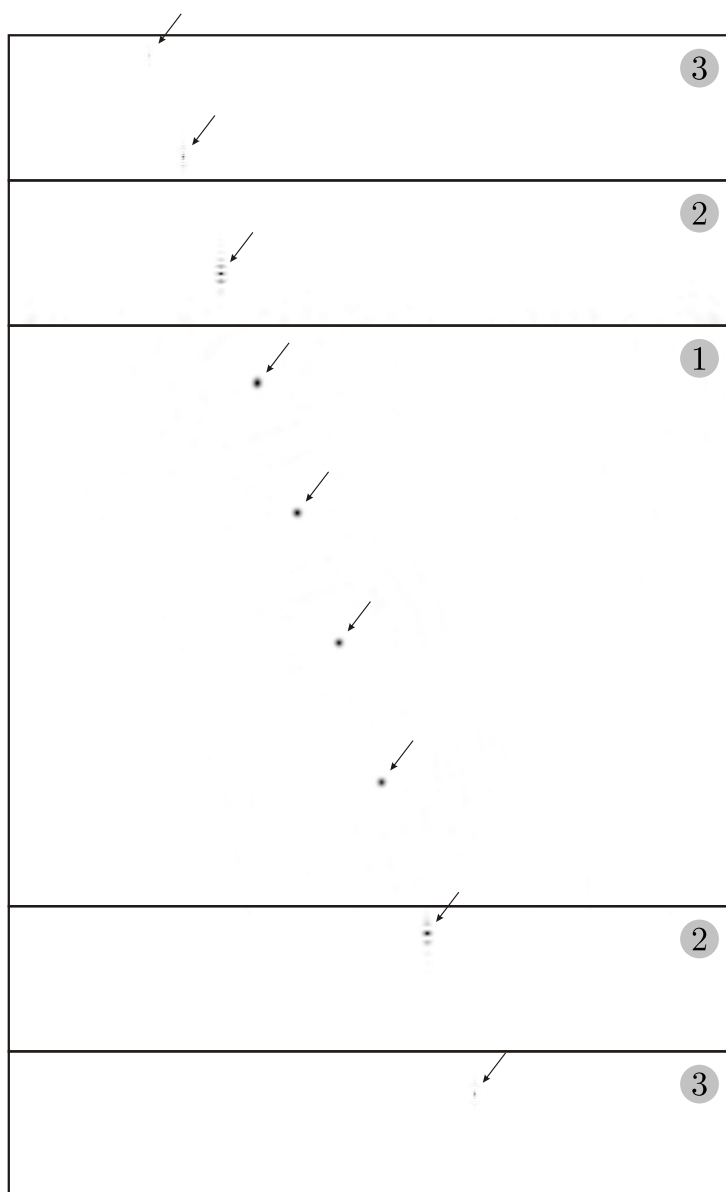
Afin d’améliorer le conditionnement du problème d’optimisation, nous remplaçons les variables d’espace  $x_p$ ,  $y_p$ ,  $x$  et  $y$  ainsi que le diamètre  $D_p$  par des variables adimensionnelles par normalisation par la taille du pixel  $\Delta$ . De plus, la distance  $z_p$  est remplacée par  $\lambda z / \Delta^2$  et l’expression du modèle de diffraction (équation 3.1) est ainsi rendue adimensionnelle.

### Recherche des paramètres $\alpha$ et $\beta$ optimaux

Pour un vecteur de paramètres  $\mathbf{p} = (x_p, y_p, z_p, D_p)$  donné, les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  optimaux peuvent être calculés directement par régression linéaire[SDF<sup>+</sup>06].

### Algorithme d’optimisation

La minimisation de  $\mathcal{C}$  par rapport à  $\mathbf{p}$  est réalisée par une méthode de Newton avec région de confiance[MS83]. Cette méthode nécessite une approximation quadratique locale du coût  $\mathcal{C}$  obtenue par le calcul des dérivées partielles de premier et deuxième ordre



*Note: Les différences d'amplitude ne permettent pas de distinguer simultanément toutes les particules. L'image représentée est la composition de 3 images: la zone ①, de même taille que l'hologramme, correspond au coût calculé sur l'hologramme initial; la zone ② correspond au coût calculé après gommage des 4 premières particules détectées; enfin, la zone ③ correspond au coût calculé après gommage des 6 premières particules détectées.*

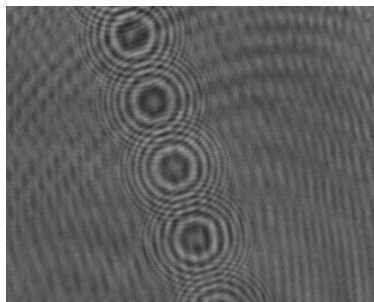
**Fig. 3.4** — Coupe du coût  $\mathcal{C}(\mathbf{p})$  selon un plan  $(x_p, y_p)$  pour l'hologramme de gouttelettes présenté à la figure 3.5. Seules 4 gouttelettes se trouvent dans le champ de l'hologramme. 9 gouttelettes sont visibles (pointées par des flèches) grâce au calcul du coût  $\mathcal{C}(\mathbf{p})$  sur un domaine 2 fois supérieur à la taille de l'hologramme.

par rapport à chacun des paramètres. Ce calcul est détaillé dans l’annexe de l’article [SDF<sup>+</sup>06].

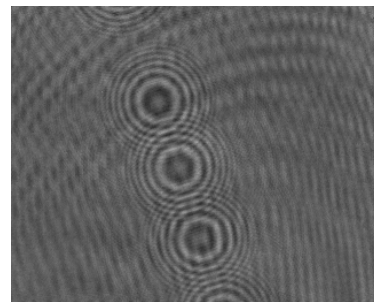
### 2.3 Gommage

Lorsque le vecteur de paramètres  $\mathbf{p}$  ainsi que les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  associés ont été obtenus, la figure de diffraction de la particule peut être retranchée à l’hologramme. Si  $m$  particules ont été détectées à l’issue de cette étape, les résidus peuvent être recalculés en retranchant à l’hologramme initial l’intensité  $I_{\mathcal{P}_m}$  tenant compte des interférences entre figures de diffraction ( $\mathcal{P}_m$  désignant l’ensemble des vecteurs de paramètres des  $m$  particules détectées). Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de chaque particule peuvent être ré-estimés simultanément pour l’ensemble des particules détectées. L’algorithme s’arrête lorsque l’hologramme résiduel (après gommage de toutes les particules détectées) ne permet pas la détection de particules de paramètre  $\alpha$  supérieur au seuil limite représentant une particule réelle (opaque).

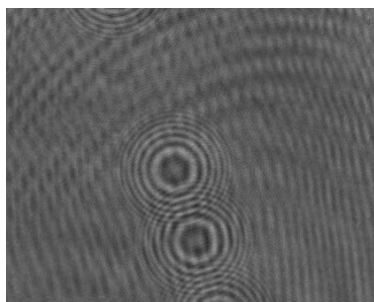
Le processus de gommage des particules détectées est illustré en figure 3.5 sur un hologramme expérimental de gouttelettes générées par injecteur piézo-électrique. L’hologramme ainsi que les résidus après soustraction de la figure de diffraction de chacune des particules détectées sont représentés. Les particules dont les systèmes d’anneaux ne sont pas tronqués sont détectées les premières puisque le coût qui leur est associé est important.



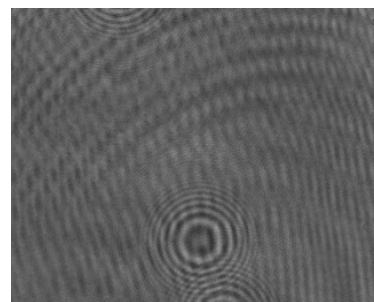
hologramme initial



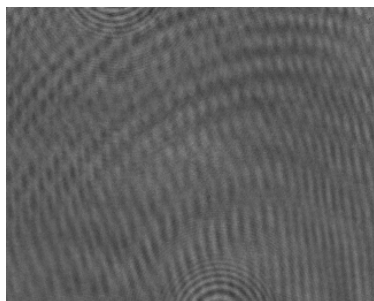
résidus à l'étape 1



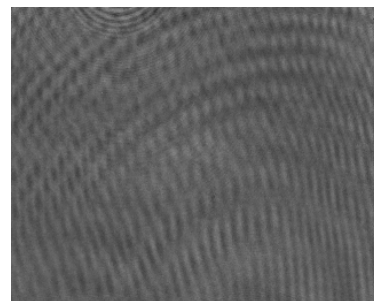
résidus à l'étape 2



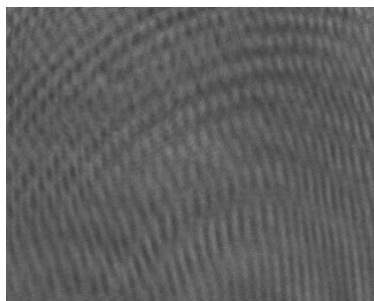
résidus à l'étape 3



résidus à l'étape 4



résidus à l'étape 5



résidus à l'étape 6

**Fig. 3.5** — Illustration du gommage des 6 particules détectées (dont 2 hors champ) : hologramme initial puis résidus à chacune des étapes de l'algorithme de détection.

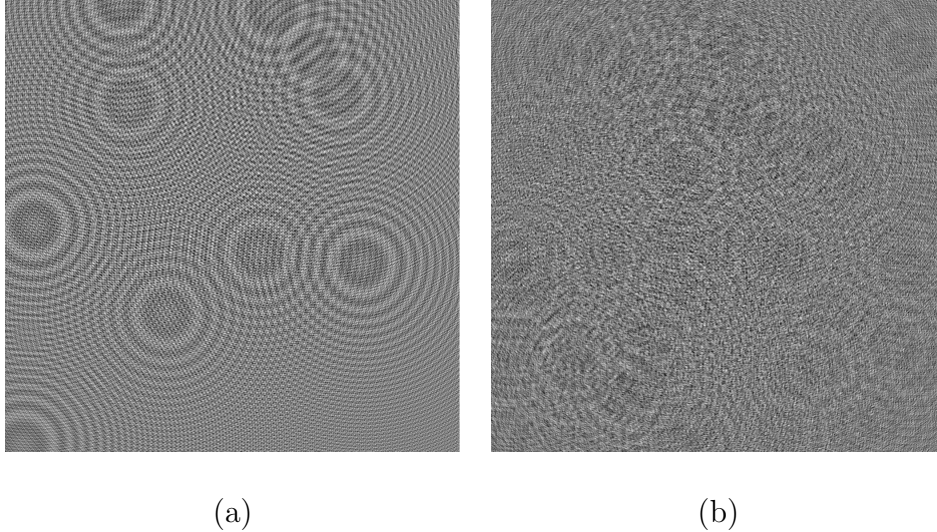


### 3 Résultats

Nous présentons ici des résultats sur deux types d'hologrammes. Tout d'abord, nous traitons des hologrammes simulés numériquement à l'aide de l'équation 3.2 afin de disposer des paramètres exacts de position et de taille des particules à détecter. Cela permettra de valider les algorithmes utilisés et d'évaluer la précision de la méthode pour des hologrammes peu concentrés (10 particules) ou plus concentrés (100 particules). Nous étudions ensuite une série de 100 paires d'hologrammes d'un jet produit par un injecteur piézo-électrique. La quasi-linéarité du jet permet d'évaluer la qualité de l'algorithme de détection et notamment de comparer la dispersion de la mesure de position transversale  $(x, y)$  et axiale  $z$ .

#### 3.1 Analyse d'hologrammes simulés

Nous avons traité des hologrammes simulés dans 4 conditions différentes correspondant à un faible nombre de particules (10) ou à un nombre plus important (100) et à des particules de petit diamètre ( $7$  à  $10\mu m$ ) ou de plus grand diamètre ( $70$  à  $100\mu m$ ). Dans le cas des hologrammes de petites particules les figures de diffraction sont très étendues : figure 3.6. L'information est par conséquent très mélangée dans l'hologramme de 100 particules (figure 3.6(b)).



**Fig. 3.6** — Exemple d'hologrammes simulés de petites particules ( $7\mu m < D < 10\mu m$ ) : (a) hologramme  $1024 \times 1024$  de 10 particules ; (b) hologramme  $1024 \times 1024$  de 100 particules.

Les positions des particules ont été tirées aléatoirement dans un volume de  $8mm \times 30mm$  et les hologrammes de  $1024 \times 1024$  pixels (taille du pixel  $\Delta = 6.7\mu m$ ) ont été calculés pour une distance d'enregistrement  $z = 100mm$  (grosses particules) ou  $z = 250mm$  (petites particules) et une longueur d'onde  $\lambda = 632nm$ . Les hologrammes ont été calculés à partir de l'équation 3.2 qui prend en compte les interférences entre les figures de diffractions des différentes particules. Le modèle  $I_{z_p, D_p}$  à partir duquel

l'algorithme a été conçu est plus simple puisqu'il néglige ces interférences. Nous avons de plus imposé une quantification de 8 bits sur les hologrammes générés afin de nous rapprocher de conditions réalistes.

Après détection de toutes les particules présentes dans les hologrammes par notre algorithme nous avons calculé l'écart-type des erreurs de mesure entre les positions et diamètres détectés et les paramètres théoriques. Le tableau 3.1 présente les écarts-types obtenus sur chacun des hologrammes. La très bonne précision obtenue (de l'ordre de  $0.3\mu m$  en  $(x, y)$  soit  $\Delta/20$  et inférieure à  $3\mu m$  en  $z$ ) semble indiquer que notre algorithme est efficace même lorsque la concentration est relativement plus importante.

La précision obtenue sur la position  $(x, y, z)$  est d'autant meilleure que le nombre d'anneaux de diffraction enregistrés est important, donc que les particules sont petites. La mesure de diamètre nécessite quant à elle d'enregistrer plusieurs lobes de diffraction et est par conséquent d'autant meilleure que les particules sont grosses.

Il est à noter que contrairement à une détection classique des particules dans les images restituées, la détection par notre algorithme donne les positions des particules sans dégradation de précision lorsqu'elles sont près du bord du capteur.

diamètre	nb. particules	$\Delta x (\mu m)$	$\Delta y (\mu m)$	$\Delta z (\mu m)$	$\Delta D (\mu m)$
$7\mu m < D < 10\mu m$	10	0.27	0.26	0.74	0.12
$7\mu m < D < 10\mu m$	100	0.30	0.30	2.37	0.24
$70\mu m < D < 100\mu m$	10	0.28	0.28	0.26	0.30
$70\mu m < D < 100\mu m$	100	0.28	0.29	0.85	1.02

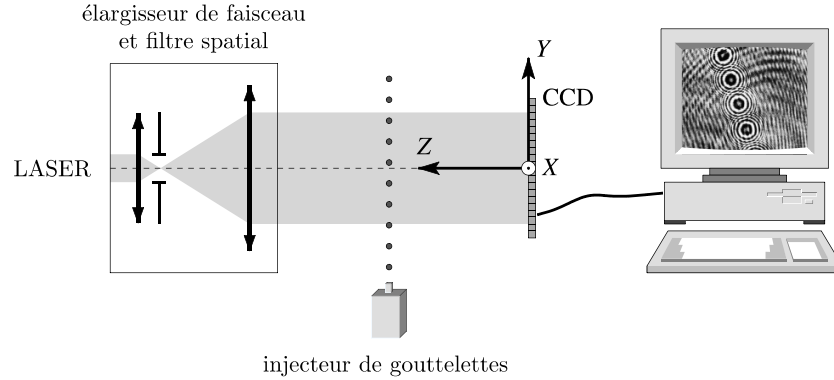
**Tab. 3.1** — Écart type des paramètres estimés à partir d'hologrammes simulés d'ensembles de particules de différents types : particules de petits diamètres ( $7\mu m < D < 10\mu m$ ) ou particules de grands diamètres ( $70\mu m < D < 100\mu m$ ), (d'après [SDF<sup>+</sup>06]).

### 3.2 Analyse d'hologrammes expérimentaux d'un jet rectiligne

Nous avons appliqué notre algorithme de détection sur un jet expérimental de gouttelettes d'eau produites par un injecteur piézo-électrique. Le montage est illustré en figure 3.7. Les différentes caractéristiques sont rappelées ci-dessous :

**Laser** Le laser utilisé est un laser dédié à la PIV (vélocimétrie par image de particules). Il s'agit d'un laser YAG double cavité capable de générer à la longueur d'onde  $\lambda = 532nm$  des paires d'impulsions de  $7ns$  synchronisés avec la caméra. Ainsi, des paires d'images séparées de  $100\mu s$  peuvent être enregistrées. La vitesse instantanée des objets peut ainsi être mesurée.

**Injecteur** L'injecteur est un système piézo-électrique capable de fonctionner en mode mono-dispersé (i.e. gouttelettes de taille constante). Les gouttelettes étaient générées à la fréquence de 1kHz.



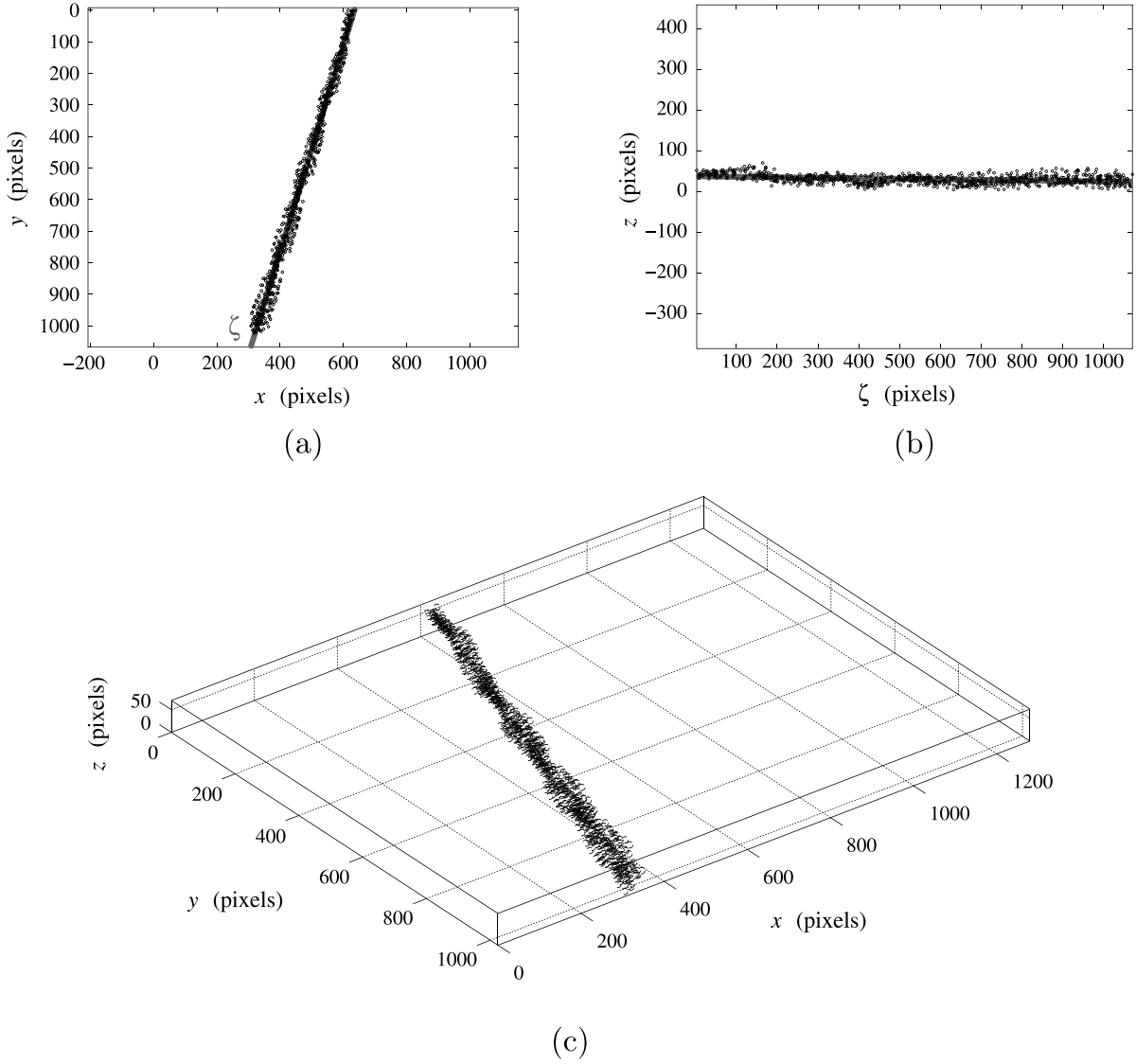
**Fig. 3.7** — Illustration du montage utilisé pour enregistrer les hologrammes de trains de gouttelettes (d’après [SDF<sup>+</sup>06]).

**Caméra** Les hologrammes sont enregistrés sur une caméra PCO Sensicam 12 bits de  $1280 \times 1024$  pixels de  $\Delta = 6.7\mu m$  de côté. La caméra est placée à  $250mm$  de l’injecteur afin de ne pas perturber l’écoulement.

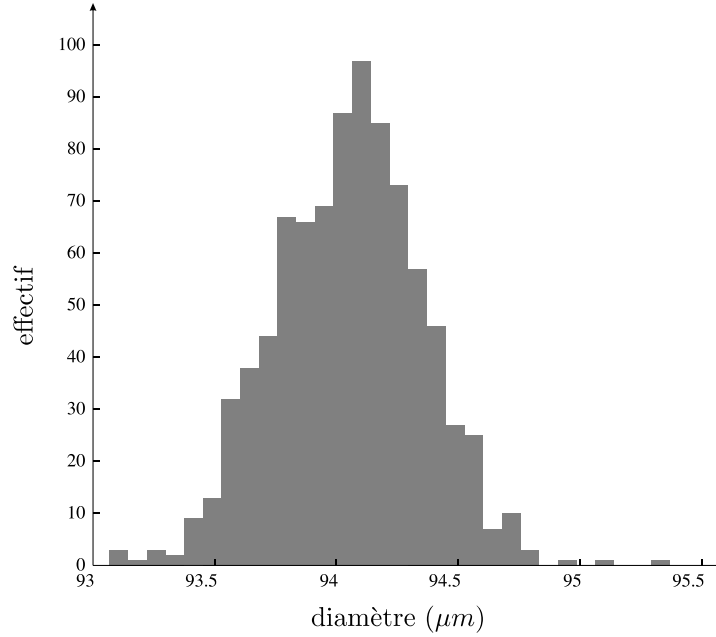
Une série de 100 paires d’hologrammes a été enregistrée. Chaque hologramme contient 4 à 5 gouttelettes dans son champ. Un des hologrammes est présenté en figure 3.5. Les positions 3D des gouttelettes ainsi que les diamètres ont été calculés pour chacun des hologrammes à l’aide de notre algorithme.

La figure 3.8 donne plusieurs représentations des positions des particules. Les gouttelettes sont toutes alignées autour d’une droite moyenne correspondant à la trajectoire attendue. Nous avons noté  $\zeta$  cette direction. Les représentations des positions des gouttelettes dans les plans projetés  $(x, y)$  et  $(\zeta, z)$  permettent de comparer la précision de la détermination de la position transversale  $(x, y)$  (centre des systèmes d’anneaux) et de la position axiale  $z$  (modulation fréquentielle des anneaux). Classiquement, la précision transversale est de l’ordre de la dizaine de microns alors que la précision axiale est de l’ordre de la centaine de microns. D’après les représentations (a) et (b) de la figure 3.8 la précision axiale est largement améliorée. Ainsi, dans la représentation 3D (c) les précisions transversales et axiales apparaissent meilleures que la divergence physique du jet. L’écart-type des distances entre les positions mesurées et la droite moyenne valent  $66\mu m$  dans le plan  $(x, y)$  et  $58\mu m$  dans le plan  $(\zeta, z)$ . Le fait qu’il n’y ait pas une dispersion des positions plus importante autour de la droite moyenne dans le plan  $(\zeta, z)$  prouve que l’écart-type de la mesure de position axiale est inférieur à la divergence du jet.

Les diamètres des gouttelettes sont représentés dans l’histogramme de la figure 3.9. Le diamètre moyen vaut  $94.1\mu m$  avec un écart-type de  $0.3\mu m$  (soit  $\Delta/20$ ). Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus avec une autre méthode de mesure optique : la Phase Doppler Anemometry (PDA). La granulométrie obtenue par cette technique est représentée en figure 3.10. La mesure PDA est en accord (diamètre moyen :  $93.33\mu m$ , écart-type :  $1.41\mu m$ ) avec la mesure par holographie numérique. Les résultats des mesures par ho-



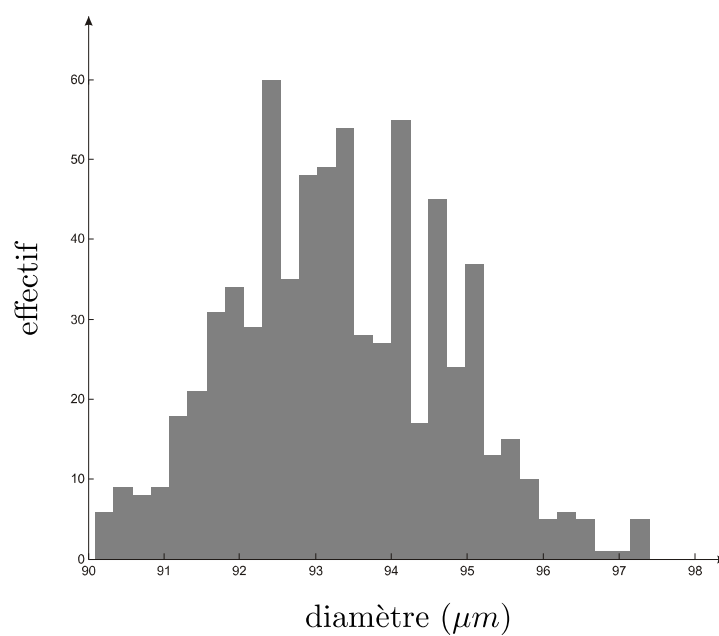
**Fig. 3.8** — Représentation du jet de gouttelettes après traitement par l'algorithme de détection des 100 paires d'hologrammes : (a) vue en  $(x, y)$ ; (b) vue en  $(\zeta, z)$ ; (c) représentation 3D des gouttelettes. La trajectoire rectiligne du jet, estimée par régression linéaire, est tracée en trait épais (d'après [SDF<sup>+</sup>06]).



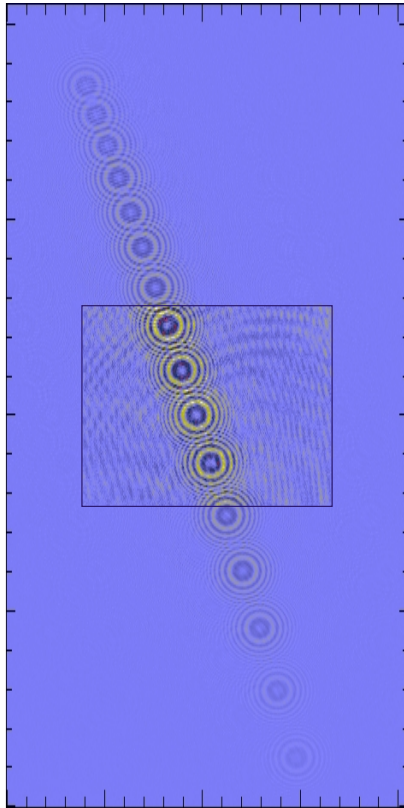
**Fig. 3.9** — Histogramme des diamètres des gouttelettes de la série de 100 paires d'hologrammes (d'après [SDF<sup>+</sup>06]).

lographie numérique dépendent, indépendamment de la précision de l'algorithme, de la précision du calibrage du montage et notamment de la mesure de la divergence du faisceau incident. En effet, cette divergence joue le rôle d'un grossissement modifiant les positions, diamètres et vitesses mesurées sur l'hologramme !

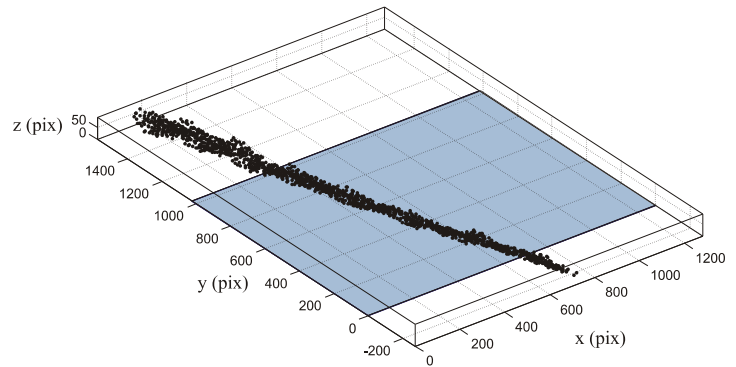
La capacité de notre algorithme à détecter des particules situées hors du champ de l'hologramme est illustrée en figure 3.11. Une superposition d'un hologramme et du modèle  $I_{\mathcal{P}_{16}}$  des 16 particules détectées est représentée en figure 3.11(a). Les 3/4 des particules détectées se trouvent hors du support de l'hologramme et toutes les particules d'une zone correspondant à un quadruplement de la taille de l'hologramme ont été détectées. Les algorithmes classiques ne permettent pas de détecter une particule située au-delà de quelques pixels du bord de l'hologramme. La figure 3.11(b) présente une représentation 3D du jet reconstruit après traitement des 200 hologrammes par analyse d'une zone deux fois supérieure à la taille d'un hologramme. Il n'y a pas de biais notable hors du support de l'hologramme à l'échelle représentée.



**Fig. 3.10** — Histogramme des diamètres des gouttelettes obtenus par mesure Phase Doppler Anemometry (PDA), (d'après [FGM<sup>+</sup>06]).



(a)



(b)

**Fig. 3.11** — Illustration de la détection des gouttelettes situées hors-champ : (a) superposition d'un des hologrammes de la série et du modèle de cet hologramme calculé à partir des 16 particules détectées (dont 12 hors-champ) ; (b) représentation 3D du jet obtenu par détection de toutes les particules comprise dans un champ correspondant à deux fois la surface de l'hologramme. La surface correspondant au capteur est représentée en bleu. La détection des gouttelettes est réalisée sans biais notable même pour les particules situées à plusieurs centaines de pixels du bord du capteur (d'après [SDFT06]).

## 4 Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre une méthode pour la détection de micro-particules basée sur une formalisation du problème comme un problème inverse. Cela a permis d'exprimer l'adéquation entre le modèle des objets et les données directement dans le plan de l'hologramme et non dans un plan obtenu par transformation de Fresnel. Nous avons proposé un algorithme de détection itératif réalisant à chaque passe une exploration de l'espace des paramètres  $(x_p, y_p, z_p)$ . Le diamètre peut être obtenu soit par la technique d'analyse de l'autocorrélation décrite dans le chapitre suivant, soit par exploration de l'espace de dimension 4 :  $(x_p, y_p, z_p, D_p)$ . Une valeur approchée de chacun des paramètres de position est ainsi obtenue par une approche de type détection optimale supprimant les artefacts de "doubles pics" présents dans les volumes restitués classiquement. Une étape d'optimisation locale est ensuite réalisée pour affiner la valeur des paramètres avec une résolution sub-pixel. D'après les premiers résultats obtenus, cette étape permet une amélioration de la précision axiale d'un facteur 5 par rapport aux techniques classiques.

La prise en compte des bords du capteurs à toutes les étapes de l'algorithme permet de supprimer quasiment totalement le biais lié à la troncature des anneaux de diffraction. Nous avons ainsi pu montrer la possibilité de détecter correctement des particules situées hors champ dans une zone deux fois supérieure à la taille de l'hologramme. Cette possibilité offre des perspectives riches pour les expérimentateurs en mécanique des fluides dont la taille des champs d'étude est souvent plus importante que celle des capteurs matriciels disponibles sur le marché.

La procédure de gommage des particules détectées améliore le rapport signal sur bruit des figures de diffraction restant à détecter. Il semble ainsi possible d'obtenir les positions de particules même lorsqu'elles sont proches les unes des autres (amas) et également à une grande distance du capteur alors que seules quelques franges très peu contrastées sont enregistrées sur l'hologramme.

La formulation du problème directement dans le plan de l'hologramme supprime le problème d'image jumelle dont nous avons montré au chapitre 2 qu'il apparaissait lors de la restitution par transformée de Fresnel.

L'expression très générale de la méthode permet d'envisager de détecter d'autres types d'objets. Il suffit pour cela d'être capable d'exprimer un modèle de la figure de diffraction d'un objet. Le nombre de paramètres nécessaires à la description de l'objet représentera cependant une limite liée aux capacités de mémoire et de calcul requise pour l'exploration de l'espace des paramètres. Dans le cas de fibres, par exemple, 3 paramètres supplémentaires seraient nécessaires (7 paramètres au total : position 3D, épaisseur, longueur, orientation 3D).

Les limites de notre algorithme sont liées au temps de calcul nécessaire pour traiter les hologrammes. Effectivement, dans sa formulation itérative, le temps de traitement est proportionnel au nombre de particules. Ce temps devient prohibitif pour des fortes concentrations. Il est cependant possible d'améliorer la performance en réalisant la détection de plusieurs particules à chaque exploration de l'espace des paramètres. De plus, les fortes concentrations étudiées par des méthodes statistiques de sous-ensemble



de gouttelettes peuvent être traitées par l’utilisation de la première étape de l’algorithme seule. L’espace des paramètres reconstruits est alors une sorte de restitution améliorée dont la segmentation fournirait la position des particules détectées.

L’approximation linéaire utilisée par l’algorithme semble confortée par les résultats obtenus. Les images de résidus après gommage présentées en figure 3.5 illustrent notamment la très bonne concordance entre le modèle choisi et les données expérimentales.

# Analyse directe d'un hologramme par stéréologie en projection

---

*Nous développons dans cette partie une analyse de type “stéréologie en projection” afin d’extraire à partir d’un hologramme certaines propriétés morphologiques d’une distribution 3D d’objets. Le premier paragraphe rappelle le principe de la démarche stéréologique ainsi que le rôle de la covariance morphologique dans l’étude des distributions de taille et d’orientation d’une population d’objets. Nous établissons ensuite des propriétés fondamentales vérifiées par le spectre et l’autocovariance d’une amplitude complexe diffractée ou de l’intensité d’un hologramme. Il apparaît alors que le covariogramme géométrique moyen des projections des objets, défini dans le paragraphe 1, est accessible par une analyse de la covariance morphologique de l’hologramme. Une méthode d’extraction de l’information de taille, puis de l’information d’orientation d’une population de micro-objets à partir du covariogramme géométrique moyen est ensuite proposée. Ces méthodes sont appliquées sur des hologrammes de gouttelettes et de fibres.*

---

*Ce chapitre s’appuie sur les articles [DFF<sup>+</sup>06, DFFJ06].*

## 1 Rappels de stéréologie et de morphologie mathématique

La stéréologie traite du problème de l’estimation de propriétés morphologiques 3D à partir d’informations 1D ou 2D obtenues par coupe (stéréologie en coupe) ou par projection (stéréologie en projection). Des mesures 3D peuvent être estimées à partir de mesures 1D (longueur, nombre d’intersections) ou 2D (surface, périmètre, nombre de connexité) grâce aux relations stéréologiques dues à Crofton. D’autres paramètres morphologiques peuvent être obtenus par l’intermédiaire de modèles aléatoires. Les paramètres de ces modèles aléatoires 3D sont ajustés sur les mesures 1D et 2D, puis des

mesures 3D sur des réalisations du modèle permettent d'estimer certaines grandeurs 3D. Le développement de la stéréologie s'est fortement appuyé sur les travaux de la morphologie mathématique initiés à l'École des Mines de Paris par G. Matheron et J. Serra. Nous présentons dans cette partie des résultats de morphologie mathématique concernant la covariance et l'analyse de l'anisotropie. Nous montrerons dans la partie suivante que la covariance d'un hologramme vérifie une propriété particulièrement intéressante permettant d'accéder directement au covariogramme géométrique moyen des ouvertures des objets.

## 1.1 La covariance morphologique

La covariance est un outil morphologique essentiel qui permet d'accéder à de nombreux types d'informations [Ser82] :

- taille,
- anisotropie,
- périodicités,
- analyse d'amas d'objets,
- analyse d'un mélange d'objet de tailles très différentes,
- superposition d'échelles,
- bruit,
- étude de structures multiphasées.

### Définitions

La covariance d'un objet (déterministe), caractérisé par sa fonction indicatrice  $\vartheta(x)$ , s'écrit<sup>1</sup> d'après [Ser82] :

$$K(h) = \int_{\mathbb{R}^n} \vartheta(x)\vartheta(x+h)dx \quad (4.1)$$

Si  $X$  désigne un compact de  $\mathbb{R}^n$  dont la fonction indicatrice est  $\vartheta(x)$  (par exemple :  $n = 2$  et  $X$  est le modèle de la projection d'un micro-objet) et  $B = \{0, h\}$  alors la définition précédente de la covariance s'interprète comme la mesure de l'ensemble  $X$  érodé<sup>2</sup> par  $B$  :

$$K(h) = \text{Mes}(X \ominus \check{B}) = \text{Mes}(X \cap X_{-h}) \quad (4.2)$$

Si  $A$  est une réalisation d'un ensemble aléatoire stationnaire, alors la covariance morphologique est donnée par :

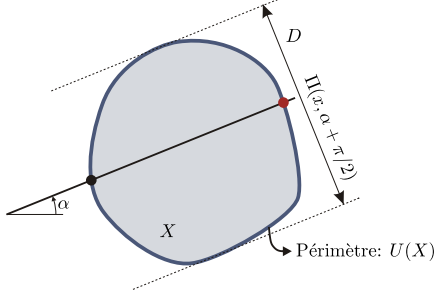
$$C(h) = P \{x \in A, x+h \in A\}. \quad (4.3)$$

Afin de modéliser certaines images (ou la structure du milieu physique dont on traite des images de coupes) des modèles aléatoires ont été introduits [Jeu00, SKM95]. Une

<sup>1</sup>nous prenons ici la définition donnée dans [Ser82] introduite dans le cadre de la théorie de la morphologie mathématique et des ensembles aléatoires. Elle correspond à la définition habituelle de l'autocorrélation.

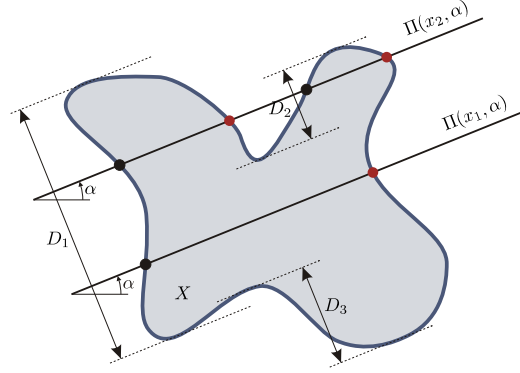
<sup>2</sup>nous utilisons ici les notations standard de la morphologie mathématique :  $\check{B}$  désigne le symétrique de  $B$  par rapport à l'origine et  $X_{-h}$  le translaté de  $X$  par le vecteur  $-h$

Variation diamétrale:  $D^{(2)}(X, \alpha) = D$   
 Nombre d'intercepts:  $N^{(1)} = 1$



(a)

Variation diamétrale:  $D^{(2)}(X, \alpha) = D_1 + D_2 + D_3$   
 Nombre d'intercepts:  $N^{(1)}[X \cap \Pi(x_1, \alpha)] = 2$   
 Nombre d'intercepts:  $N^{(1)}[X \cap \Pi(x_2, \alpha)] = 1$



(b)

**Fig. 4.1** — Variation diamétrale et nombre d'intercepts pour deux ensembles  $X$  : (a)  $X$  est convexe et la variation diamétrale  $D^{(2)}(X, \alpha)$  correspond à la longueur projetée sur une droite  $\Pi(x, \alpha + \pi/2)$ , le nombre d'intercepts vaut toujours 1 ; (b)  $X$  est quelconque, la variation diamétrale est la somme des longueurs projetées  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$ , le nombre d'intercepts (matérialisés par des points rouges) dépend de la droite  $\Pi(x, \alpha)$ .  
 (d'après [Ser82], page 136)

des familles de ces modèles consiste en l'implantation de grains (images binaires) ou de fonctions dites “primaires” en des points définis par un processus aléatoire. La covariance morphologique d'un grain primaire est appelée *covariogramme géométrique*.

**Dérivée à l'origine de la covariance** La dérivée à l'origine de la covariance  $K(h)$  d'un ensemble déterministe ou aléatoire 2D donne accès à la variation diamétrale :

$$-K'_\alpha(0) = E[D^{(2)}(X, \alpha)], \quad (4.4)$$

avec  $D^{(2)}$  la variation diamétrale (voir figure 4.1) et  $E$  l'espérance mathématique. En dimension 2,  $h = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ . Par intégration sur les angles  $\alpha$  de la dérivée à l'origine, on obtient le périmètre  $U(X)$  :

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K'_\alpha(0) d\alpha = \frac{E[U(X)]}{\pi}. \quad (4.5)$$

Ce résultat découle des formules stéréologiques de Crofton en dimension 2 :

$$D^{(2)}(X, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} N^{(1)}[X \cap \Pi(x, \alpha)] dx, \quad (4.6)$$

$$U(X) = \int_0^\pi D^{(2)}(X, \alpha) d\alpha. \quad (4.7)$$

La formule 4.6 lie la variation diamétrale  $D^{(2)}$  au nombre d'intercepts  $N^{(1)}$ . Ce nombre correspond aux intersections “sortantes” entre  $X$  et la droite  $\Pi(x, \alpha)$ . Le périmètre est

obtenu d'après l'équation 4.7 par intégration de la variation diamétrale. La figure 4.1 illustre ces différentes grandeurs.

**Portée géostatistique** La tangente à l'origine coupe l'asymptote de la covariance en une abscisse appelée *portée géostatistique*. La portée géostatistique est caractéristique de la taille (l'échelle) de  $X$ .

La covariance est donc riche en informations morphologiques sur un fermé déterministe ou sur un fermé aléatoire. Il est important de noter que le bruit blanc (i.e. non corrélé) se somme à l'origine de la covariance. La valeur à l'origine peut-être estimée par prolongement par continuité et ainsi le niveau de bruit être déduit.

La covariance peut également être exploitée à plus grande échelle. Nous ne détaillons cependant pas cet aspect car seule l'analyse à petite échelle (dérivée à l'origine, portée géostatistique) sera applicable dans les parties suivantes.

## 1.2 Rose des intercepts et rose des orientations

L'étude d'images d'objets anisotropes est un problème fréquent en analyse d'images. Un exemple typique d'objet anisotrope est la fibre, modélisée comme un segment ou comme une ellipse[KJJ02]. Une distribution stationnaire d'objets est dite *isotrope* si ses propriétés statistiques sont inchangées par rotation. Dans le cas contraire, on parle de distribution *anisotrope*.

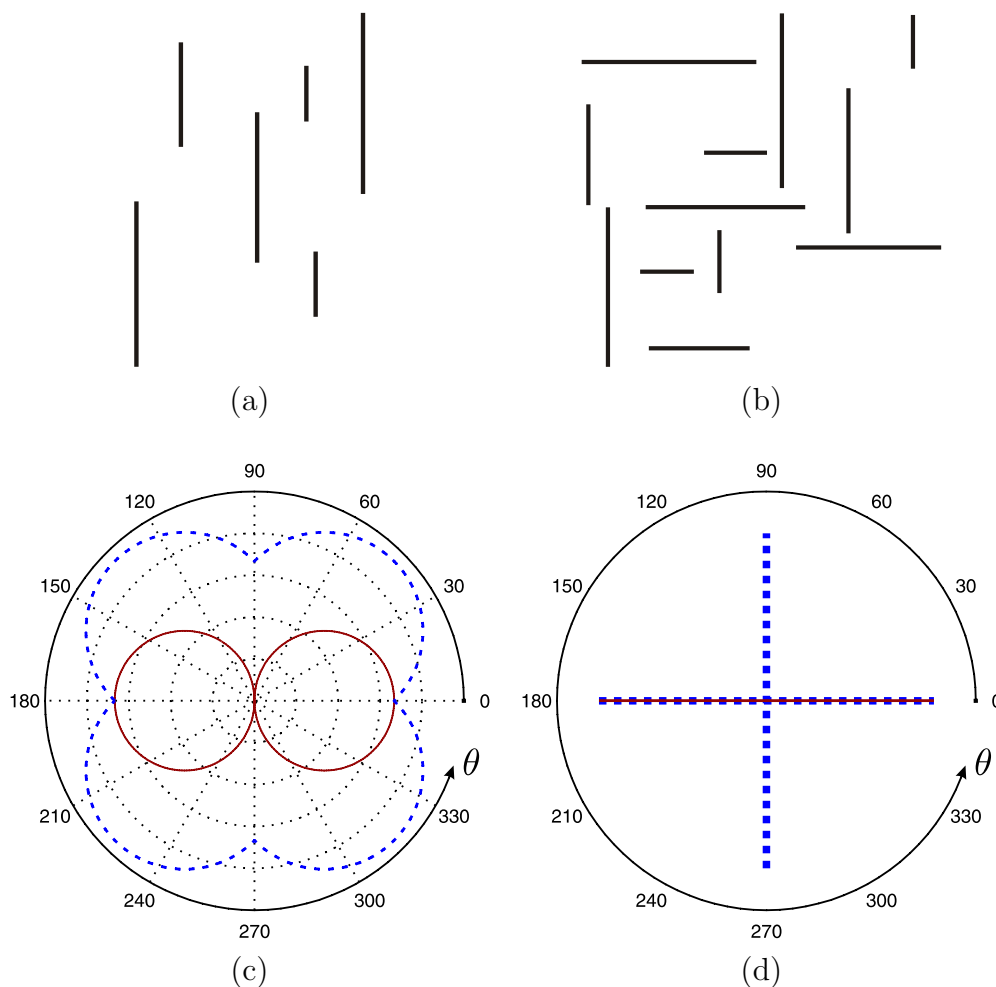
La *rose des orientations*  $R$  est utilisée classiquement afin de caractériser l'anisotropie d'une distribution d'objets.  $R$  représente la distribution des orientations des objets, pondérée par la longueur moyenne dans chacune des orientations. Si la distribution d'objets est isotrope, alors  $R$  est uniforme. Par contre, le fait que  $R$  soit uniforme n'implique pas forcément que la distribution d'objet est elle-même isotrope[Ser82, SB91, KP05] :  $R$  porte une information d'isotropie "locale", on parle d'*isotropie faible*[KP05]. Une rose des orientations non-uniforme indique quant à elle clairement une anisotropie dans la distribution d'objets. En particulier, les orientations privilégiées peuvent être détectées. L'estimation de  $R$  nécessite soit une mesure directe des orientations spatiales des objets, soit une approche indirecte. Dans ce dernier cas,  $R$  est déduit d'une autre quantité portant la même information mais plus facile à estimer à partir d'une image. C'est le cas de la rose des intercepts[Ser82, SB91, KP05] ou du covariogramme géométrique moyen (partie 3.2).

La rose des intercepts  $\gamma(\alpha)$  est définie comme le nombre moyen d'intercepts entre les objets et un segment de longueur unité et d'orientation  $\alpha$  [Ser82]. La rose des intercepts est liée à la rose des orientations par l'intermédiaire de la relation intégrale suivante :

$$\gamma(\alpha) = \int_0^\pi \sin(\theta - \alpha) R(d\theta). \quad (4.8)$$

Cette relation est difficile à inverser car il s'agit d'un problème mal posé.

La rose des intercepts, accessible directement par un calcul de nombre d'intercepts ou indirectement par estimation de la dérivée à l'origine de la covariance morphologique,



**Fig. 4.2** — Illustration de la rose des intercepts et de la rose des orientations de deux ensembles : (a) ensemble d'objets anisotropes présentant une orientation unique ; (b) ensemble d'objets anisotropes présentant deux orientations privilégiées orthogonales ; (c) rose des intercepts de l'ensemble (a) (courbe continue rouge) et de l'ensemble (b) (courbe pointillée bleue) ; (d) rose des orientations de l'ensemble (a) (courbe continue rouge) et de l'ensemble (b) (courbe pointillée bleue).  
 (d'après [Ser82], page 286)

porte la même information que la rose des orientations [KP05]. La rose des intercepts n'est cependant pas toujours interprétable aisément. En effet, bien que la présence d'une unique orientation privilégiée se traduise par un maximum de la rose des intercepts dans la direction orthogonale correspondante (figure 4.2), la présence de différentes orientations au sein de la population d'objets peut conduire à un maximum situé dans une direction ne correspondant à aucune orientation privilégiée (figure 4.2).

La rose des orientations est quant à elle plus difficile à atteindre. Son interprétation est immédiate puisqu'elle représente l'histogramme des orientations, pondéré par les tailles des objets.

## 2 Estimation du covariogramme géométrique moyen

Nous avons rappelé dans la partie précédente que la covariance morphologique, et, dans le cadre d'une modélisation aléatoire, que le covariogramme géométrique portent des informations sur la taille et sur l'anisotropie d'une distribution d'objets. Dans cette partie, nous décrivons comment à partir d'un hologramme il est possible d'obtenir le covariogramme géométrique moyen des ouvertures des objets. La partie suivante présentera comment analyser ce covariogramme.

### 2.1 Propriétés de l'amplitude complexe diffractée

Nous avons souligné dans le paragraphe 3.3 du chapitre 1 les propriétés remarquables de la transformée de Fresnel. L'amplitude complexe diffractée dans un plan donné s'exprime comme la transformée de Fresnel de la transmittance de l'objet diffractant, ou comme la somme (complexe) des transformées de Fresnel des transmittances dans le cas de plusieurs objets répartis en volume. L'intensité enregistrée par le capteur correspond au module au carré de cette amplitude complexe diffractée. Nous avons montré au chapitre 1 (équation 1.10) que l'intensité mesurée s'exprime dans le cas de petits objets comme la somme des parties réelles des transformées de Fresnel des transmittances des objets. La perte de la composante complexe lors de l'enregistrement des hologrammes conduit à une dégradation des propriétés héritées de la transformée de Fresnel complexe. L'apparition d'une image jumelle due à la perte de la propriété d'inversion parfaite a été présentée en détail dans le chapitre 2. Nous établissons dans ce paragraphe les propriétés vérifiées par une amplitude complexe diffractée. Le paragraphe suivant mettra en évidence les propriétés conservées par l'intensité de l'hologramme, seule grandeur accessible dans le cadre de notre montage. Nous insisterons alors également sur les dégradations introduites par la perte de la partie complexe du signal.

**Conservation du spectre** La transformée de Fresnel s'écrit comme un produit de convolution par la fonction de Fresnel (l'amplitude de l'onde incidente est prise égale à 1 et la référence des phases est prise dans le plan  $z$  dans l'équation 1.3) :

$$\underline{A}_z(x, y) = \underline{t} *_{(x, y)} \underline{h}_z, \text{ avec } \underline{h}_z(x, y) = \frac{1}{j\lambda z} \exp\left(j\pi \frac{x^2 + y^2}{\lambda z}\right).$$

Exprimé dans l'espace de Fourier, ce produit de convolution devient un simple produit :

$$\mathcal{F}[\underline{A}_z](u, v) = \mathcal{F}[\underline{t}](u, v) \times e^{j\pi\lambda z(u^2 + v^2)}. \quad (4.9)$$

Le spectre de puissance  $\underline{S}_{A_z}$  de l'amplitude complexe diffracté à la distance  $z$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \underline{S}_{A_z} &= \left| \mathcal{F}[\underline{A}_z](u, v) \right|^2 = \left| \mathcal{F}[\underline{t}](u, v) \right|^2 \times \left| e^{j\pi\lambda z(u^2 + v^2)} \right|^2 \\ &\underline{S}_{A_z} = \underline{S}_t. \end{aligned} \quad (4.10)$$

La diffraction conserve donc le spectre, quelle que soit la distance  $z$  de diffraction. Cette propriété est fondamentale, nous l'avons utilisée lorsque nous avons décrit le bruit d'images jumelle dans le chapitre 2.

**Propriété d'autocorrélation** De la propriété de conservation du spectre, nous pouvons déduire par application du théorème de Wiener-Khinchin la propriété d'autocorrélation suivante :

$$\begin{aligned}\underline{A}_z \star \underline{A}_z &= \mathcal{F} [\mathbf{S}_{\underline{A}_z}] \\ &= \mathcal{F} [\mathbf{S}_t] = \underline{t} \star \underline{t},\end{aligned}\tag{4.11}$$

avec la notation  $\star$  pour désigner la corrélation (2D).

Cette dernière propriété s'interprète très naturellement grâce à la propriété d'inversion de la transformée de Fresnel :

$$\begin{aligned}\underline{A}_z \star \underline{A}_z &= (\underline{t} \star \underline{h}_z) \star (\underline{t} \star \underline{h}_z) \\ &= \underline{t} \star \underline{t} \star \underbrace{\underline{h}_z \star \underline{h}_{-z}}_{=\delta} = \underline{t} \star \underline{t}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

L'équation 4.12 est intéressante car elle fait apparaître l'autocorrélation d'une amplitude complexe diffractée comme une sorte d'auto-restitution. En effet, l'autocorrélation de l'amplitude complexe peut s'interpréter comme une restitution de l'hologramme de l'autocorrélation de la transmittance.

## 2.2 Propriétés de l'intensité de l'hologramme

Nous avons montré dans le chapitre 1 que, dans le cas de petits objets, l'intensité de l'hologramme était liée à la transmittance des objets par le biais d'une convolution par la partie réelle d'une fonction de Fresnel. Si  $t$  est la transmittance d'un petit objet opaque, alors l'intensité de sa figure de diffraction enregistrée à une distance  $z$  s'écrit :

$$I(x, y) \propto 1 - 2 \underset{(x,y)}{t} \star \operatorname{Re}(\underline{h}_z).\tag{4.13}$$

Pour un petit objet, la composante continue de l'intensité correspond au premier terme. Ainsi, l'intensité centrée de l'hologramme  $\tilde{I}$  est proportionnelle au second terme de l'équation 4.13.

**Spectre** Dans l'espace de Fourier, l'équation 4.13 devient :

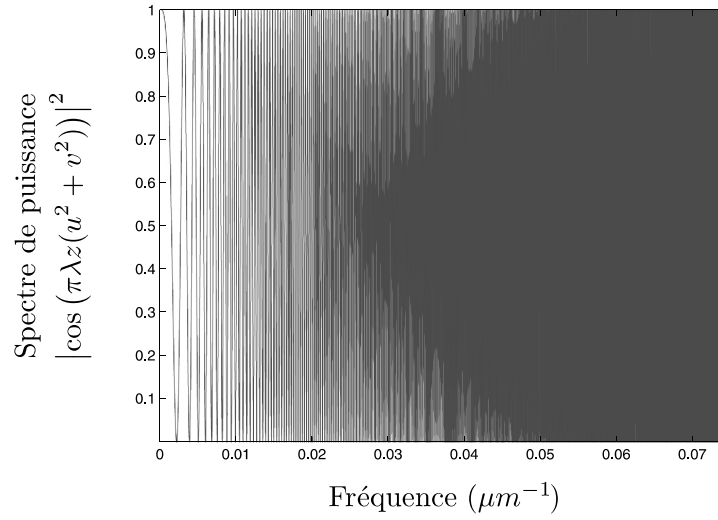
$$\mathcal{F} [\tilde{I}] (u, v) \propto -2 \mathcal{F} [t] (u, v) \times \cos (\pi \lambda z (u^2 + v^2)),\tag{4.14}$$

et le spectre de puissance de l'hologramme centré s'écrit :

$$\mathbf{S}_{\tilde{I}} \propto \mathbf{S}_t \times |\cos (\pi \lambda z (u^2 + v^2))|^2.\tag{4.15}$$



Cette fois-ci, il apparaît clairement que le spectre n'est pas conservé. Certaines fréquences, correspondant aux zéros du terme en cosinus sont même complètement perdues. C'est la raison pour laquelle il n'est pas possible de trouver de filtre linéaire réalisant la restitution parfaite (i.e. sans image jumelle) à partir de l'intensité de la figure de diffraction. Notons cependant que le nombre d'oscillations est très important : il vaut  $2\lambda z/(4\Delta)^2$  avec  $\Delta$  la taille du pixel. Pour des paramètres classiques, le nombre d'oscillations vaut 264 (cf. figure 4.3). Puisque le spectre de la transmittance des objets est à variations lentes (petits objets), on peut considérer en première approximation que le spectre de l'hologramme est une sorte d'échantillonnage (non uniforme) du spectre de la transmittance. Ainsi la propriété de conservation du spectre est globalement conservée.



**Fig. 4.3** — Illustration du terme modulant le spectre de puissance de la transmittance dans le spectre d'un hologramme. Paramètres :  $\lambda = .6328\mu m$ ,  $z = 150mm$ , taille du pixel :  $6.7\mu m$ .

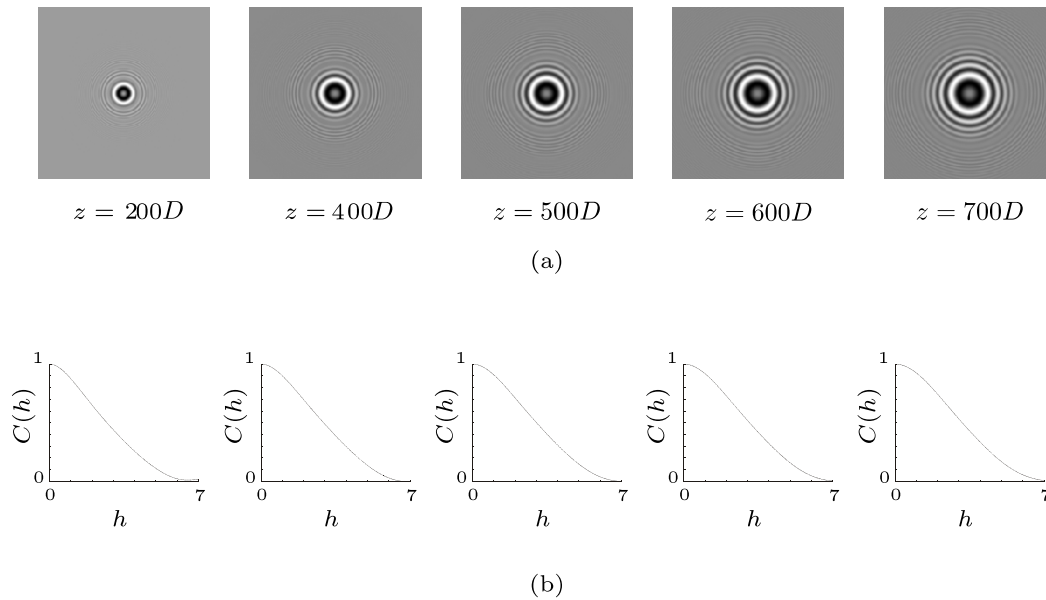
**Autocorrélation** Déduisons l'autocovariance de l'hologramme à partir l'équation 4.13 :

$$\begin{aligned}
 \tilde{I} \star \tilde{I} &\propto (t \star \text{Re}(\underline{h_z})) \star (t \star \text{Re}(\underline{h_z})) \\
 &\propto (t \star t) \star (\text{Re}(\underline{h_z}) \star \text{Re}(\underline{h_z})) \\
 &\propto (t \star t) \star (1/2(\delta + \text{Re}(\underline{h_{2z}}))) \\
 &\propto (t \star t) + (t \star t) \star \text{Re}(\underline{h_{2z}}).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

L'équation 4.16 s'interprète comme l'image restituée de l'hologramme de l'autocorrélation de la transmittance  $t$ . Le premier terme correspond à l'image focalisée de l'autocorrélation de cette transmittance alors que le second correspond à une image jumelle. Les résultats du chapitre 2 concernant la caractérisation de l'image jumelle d'un objet sont donc applicables pour l'autocovariance d'un hologramme. La propriété d'autocorrélation est elle aussi globalement conservée. Nous allons étudier plus en détail

dans le paragraphe suivant cette propriété ainsi que les erreurs dues au second terme (jumeau) de l'équation 4.16.

Nous illustrons en figure 4.4 cette propriété d'autocorrélation. Cinq hologrammes simulés d'une particule de diamètre  $D$ , enregistrés à des distances croissantes sont représentés. L'allure des figures de diffraction varie très largement de l'hologramme le plus proche de la particule ( $z = 200D$ ) à l'hologramme le plus éloigné ( $z = 700D$ ). Le profil moyen de l'autocovariance de chaque hologramme est présenté en figure 4.4(b). Les profils sont quasiment identiques, indépendamment de la distance d'enregistrement. Ceci illustre bien le principe d'autocorrélation : l'autocovariance d'un hologramme est égale à l'autocorrélation de la transmittance de l'objet (constante ici puisque l'objet ne change pas), plus un terme d'autocorrélation jumelle dont l'influence est négligeable sur le support de l'autocorrélation de la transmittance.



**Fig. 4.4** — Propriété de corrélation : quelle que soit la distance d'enregistrement de l'hologramme, son autocovariance est constante et égale à l'autocorrélation des ouvertures des objets. (a) 5 hologrammes d'une même particule sphérique opaque, à des distances d'enregistrement croissantes ; (b) profils moyens de l'autocovariance de chaque hologramme ( $h$  est exprimé en pixels de  $6.7\mu m$ ).

*Remarque :* Nous n'avons tenu compte dans les différentes équations ni des effets d'échantillonnage, ni des effets de troncature des franges de diffraction. La troncature joue cependant un rôle important puisqu'elle agit comme un filtrage passe-bas des figures de diffraction des objets situés dans le champ. Les propriétés que nous avons établies ne sont donc atteinte qu'en première approximation en pratique. Nous justifierons par la suite sur des simulations numériques puis sur des hologrammes expérimentaux que, dans les conditions classiques de l'holographie en ligne, les propriétés que nous avons décrites dans cette partie sont exploitables.

### 2.3 Autocorrélation d'une assemblée de micro-objets – obtention du covariogramme géométrique moyen

Dans le cas d'un hologramme d'un ensemble de  $N$  objets décrits par leur ouverture  $\vartheta_i$ , l'intensité s'écrit d'après l'équation 1.10 :

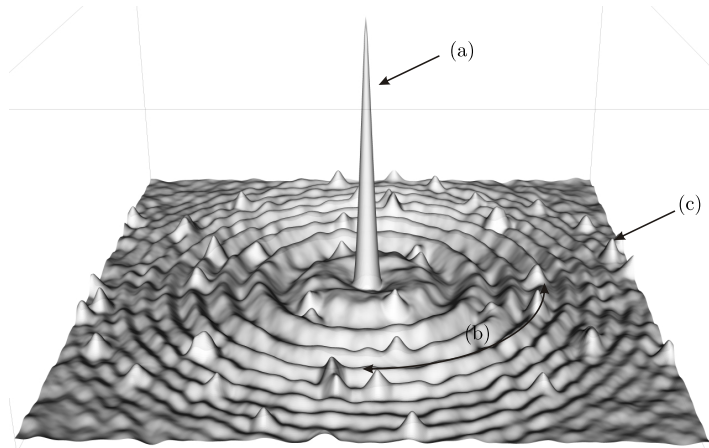
$$I_H(x, y) \propto 1 - 2 \sum_{i=1}^N \delta_{x_i, y_i} \underset{(x, y)}{*} \vartheta_i \underset{(x, y)}{*} \operatorname{Re}(\underline{h_{z_i}}).$$

D'après la propriété de corrélation calculée dans l'équation 4.16, l'autocovariance de l'hologramme s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_H \star \tilde{I}_H &= 2 \underbrace{\sum_{i=1}^N \vartheta_i \star \vartheta_i}_{(a)} + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^N \vartheta_i \star \vartheta_i \star \operatorname{Re}(\underline{h_{2z_i}})}_{(b)} \\ &+ 4 \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vartheta_i \star \vartheta_j \star \operatorname{Re}(\underline{h_{z_i}}) \star \operatorname{Re}(\underline{h_{z_j}}) \star \delta_{x_i - x_j, y_i - y_j}}_{(c)}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

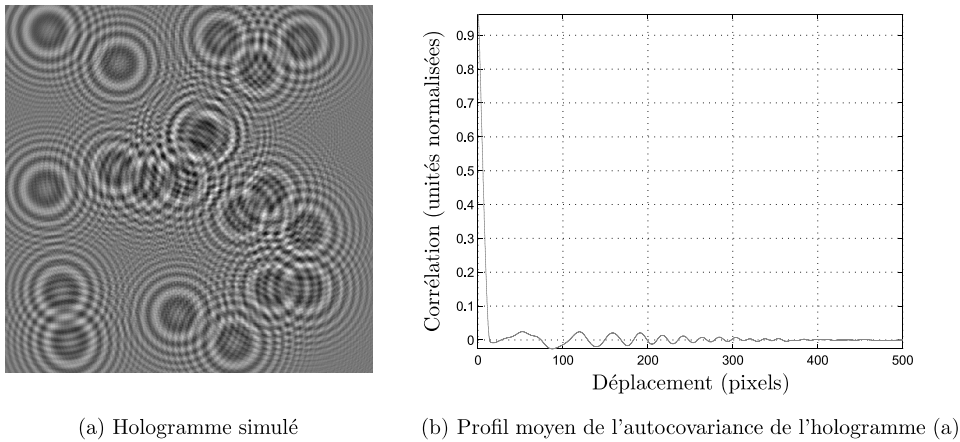
L'autocovariance de l'hologramme d'un ensemble d'objets diffractants est donc composée de trois termes : le covariogramme géométrique moyen des ouvertures (a) ; un terme jumeau du covariogramme géométrique moyen (b) ; les différentes inter-corrélations entre ouvertures et leurs composantes jumelles (c). La figure 4.5 est une représentation sous la forme d'une surface 3D de l'autocovariance d'un hologramme simulé de gouttelettes. Les différents termes apparaissent nettement : le pic central correspondant au terme (a) ; les oscillations concentriques correspondant au terme (b) ; et les différents pics et oscillations du fond dus au terme (c). L'interprétation de l'autocovariance comme une auto-restitution est encore plus intéressante dans le cas de plusieurs objets. Chaque objet donne naissance sur l'hologramme à des franges de diffraction dont la modulation de fréquence dépend de la distance de l'objet à l'hologramme. Lors de la restitution, une image nette d'un objet est obtenue par convolution de l'hologramme avec le système d'anneaux concentriques dont la modulation de fréquence correspond à celle de la figure de diffraction de l'objet (i.e. transformée de Fresnel dont le paramètre  $z$  correspond à la distance objet-hologramme). L'autocovariance de l'hologramme réalise une convolution de chaque système de franges de diffraction avec lui-même, ainsi, l'autocovariance agit comme une restitution de chaque objet adaptée à sa propre distance à l'hologramme.

Nous détaillons dans les paragraphes suivants l'influence de chaque terme et illustrons leur profil dans le cas d'objets sphériques. La figure 4.6 présente un hologramme simulé d'une vingtaine de gouttelettes ainsi que le profil moyen de son autocovariance. Nous allons décomposer ce profil afin d'analyser l'amplitude de chacun des termes qui le composent. Le choix d'illustrer ces effets sur une simulation numérique est motivé par la possibilité de calculer la phase dans le plan de l'hologramme et de s'en servir pour



**Fig. 4.5** — Représentation 3D de l'autocovariance d'un hologramme simulé de gouttelettes. Les 3 termes composant l'autocovariance sont facilement discernables : (a) pic central ; (b) oscillations concentriques ; (c) pics et oscillations répartis sur toute la surface.

isoler chacun des termes. Notons que la simulation est réalisée en appliquant l'équation 1.9 et prend par conséquent en compte les non-linéarités que nous avons négligées dans l'établissement de l'équation 4.17.



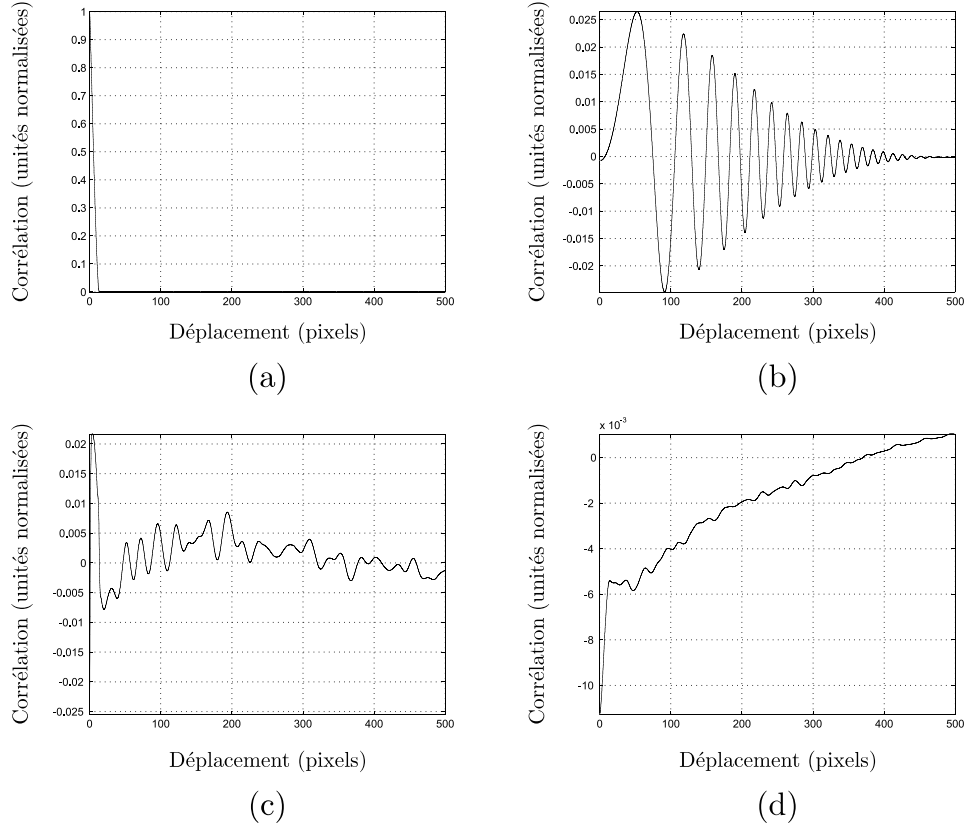
(a) Hologramme simulé

(b) Profil moyen de l'autocovariance de l'hologramme (a)

**Fig. 4.6** — Profil moyen de l'autocovariance d'un hologramme simulé de gouttelettes (1 pixel représente  $6.7\mu m$ ).

**Covariogramme géométrique moyen** (figure 4.7(a)) Ce terme est porteur de l'information de taille et/ou d'orientation des objets. Son support est limité à l'intervalle  $[0, D]$  avec  $D$  le diamètre des objets. Puisque les capteurs sont de taille centimétrique alors que les objets sont de l'ordre de la dizaine ou de la centaine de microns, ce terme est très localisé, au centre de l'autocovariance.

**Covariogramme jumeau** (figure 4.7(b)) Ce terme est formé de franges concentriques (anneaux concentriques dans le cas d'objets isotropes comme dans l'exemple des figures



**Fig. 4.7** — Décomposition du profil de la figure 4.6 en 4 termes : (a) covariogramme géométrique moyen ; (b) covariogramme jumeau ; (c) intercorrélations ; (d) non-linéarités. (1 pixel représente  $6.7\mu m$ )

4.5 à 4.7) dont la modulation fréquentielle correspond à celle d'une fonction de Fresnel de paramètre  $2\bar{z}$ , avec  $\bar{z}$  la distance moyenne des objets à l'hologramme. Ce terme est négligeable sur l'intervalle  $[0, D]$  pour des valeurs suffisantes de  $\bar{z}$ . Son premier maximum est en effet atteint près de celui de  $\text{Re}(h_{2\bar{z}})$ , c'est à dire pour  $h \approx \sqrt{\lambda\bar{z}}$ , largement supérieur à  $D$  dans nos applications (ordre de grandeur :  $D \in [10; 150]\mu m$  et  $h \approx \sqrt{0.6\mu m \times 150mm} \approx 300\mu m$ ). L'amplitude de ce terme décroît proportionnellement à  $1/\bar{z}$ . Dans la figure 4.7(b), il a été calculé à partir de l'amplitude complexe simulée  $\underline{A}_z$  par l'intermédiaire de la relation suivante :  $\text{Re}(\underline{\tilde{A}}_z \star \underline{\tilde{A}}_z^*) = \sum_{i=1}^N \vartheta_i \star \vartheta_i \star \text{Re}(h_{2z_i})$  (avec  $\underline{\tilde{A}}_z$  l'amplitude complexe centrée et  $\underline{\tilde{A}}_z^*$  son conjugué). Dans l'exemple de la figure 4.7(b), la valeur maximale de ce terme dans l'intervalle  $[0, D]$  atteint  $\simeq 0.3\%$  du maximum du terme (a).

**Intercorrélations** (figure 4.7(c)) Ce terme consiste en des pics de même extension spatiale  $2D$  que le pic central, mais répartis sur toute l'image de corrélation (convolution par  $\delta_{x_i-x_j, y_i-y_j}$ ) : figure 4.5. Pour de faibles densités de particules, c'est à dire des densités compatibles avec le montage d'holographie en ligne, ce terme est fortement anisotrope. Il est par conséquent fortement atténué par intégration radiale (moyenne annulaire). Ce

terme dépend de la distribution spatiale des objets.

La courbe de la figure 4.7(c) correspond à la fois à ce terme et aux effets de bord. Il est en effet calculé comme la différence entre l'autocovariance d'un hologramme généré grâce à l'approximation linéaire 1.10 et la somme des termes (a) et (b). Comme le terme (a) a été calculé à partir de l'expression analytique du covariogramme géométrique d'un disque, le terme (c) rend également compte des erreurs dues aux effets de bord qui apparaissent quand les figures d'interférences sont tronquées par le capteur.

L'amplitude de ce terme dans la figure 4.7(c) est inférieure à 2.5% du maximum du terme (a).

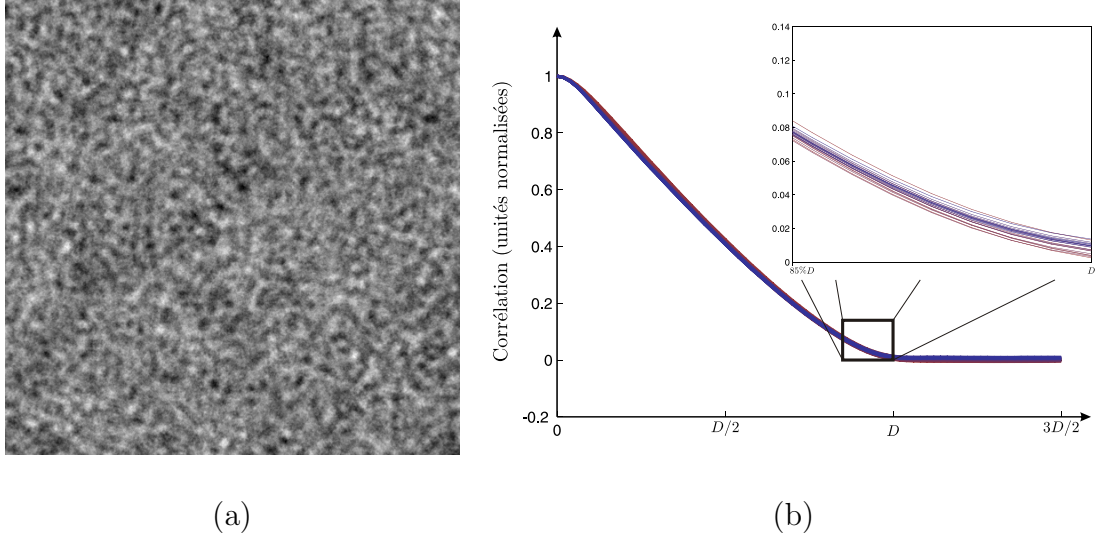
**Non-linéarités** (figure 4.7(d)) Les termes restants sont dus à l'approximation linéaire réalisée dans l'équation 4.17. Ces termes peuvent sembler plus problématiques car ils sont difficiles à modéliser et donc à supprimer ou à atténuer. Une partie importante de ces termes se somme au centre de l'autocorrélation. Leur influence pour des hologrammes faiblement concentrés semble cependant être faible : moins de 1% dans la figure 4.7(d). La partie non linéaire de l'expression de l'hologramme d'un seul objet peut être incluse dans la modélisation afin de réduire l'influence de ce terme. En cas d'hologrammes très fortement concentrés, les termes non-linéaires traduisant les interférences entre les figures de diffraction des différents objets ne sont plus négligeables. Il semble d'après les simulations numériques que le terme (a) reste dominant jusqu'à des concentrations relativement élevées, comme l'indique la figure 4.8. Les profils moyens d'autocovariance d'hologrammes à différentes concentrations sont tracés en figure 4.8(b). Très peu de variations sont notables même pour des concentrations très élevées (l'hologramme le plus concentré est représenté en figure 4.8(a)).

### 3 Analyse quantitative du covariogramme géométrique moyen

Nous avons rappelé dans le paragraphe 1 que le covariogramme géométrique moyen était porteur de nombreuses informations sur la population d'objets. La partie 2 nous a fourni une méthode pour extraire d'un hologramme de micro-objets une approximation du covariogramme géométrique moyen des projections des objets. Nous décrivons dans ce paragraphe comment remonter à des informations quantitatives de taille et/ou d'orientation à partir d'un covariogramme géométrique moyen.

#### 3.1 Estimation de la taille moyenne de particules sphériques

L'ouverture d'une particule sphérique est un disque de même diamètre que le diamètre de la particule. Nous décrivons dans ce paragraphe les approches possibles pour extraire l'information de taille contenue dans le covariogramme géométrique moyen d'une population de disques.



**Fig. 4.8** — Évolution du profil moyen d'autocovariance avec la concentration des hologrammes en particules : (a) hologramme le plus concentré (10 000 particules de  $100\mu m$  dans un volume de  $10mm \times 10mm \times 10mm$ , hologramme de  $512 \times 512$  pixels, pixels de  $10\mu m$  de côté) ; (b) profils moyen de l'autocovariance pour un hologramme de 30 particules (courbe rouge) jusqu'à l'hologramme (a) de 10000 particules (courbe bleue), les profils se superposent quasiment : dans la zone sur laquelle est effectué un zoom l'écart maximum entre les courbes représente 1% du maximum de corrélation. *Note : les hologrammes sont simulés avec une onde plane de référence supposée non déformée.*

**Covariogramme géométrique d'un disque** Il s'agit d'un résultat classique. Le profil du covariogramme est donné par [DFF<sup>+</sup>06] :

$$K_D(r) = \begin{cases} \frac{D^2}{2} \left( \arccos\left(\frac{r}{D}\right) - \frac{r\sqrt{1-\frac{r^2}{D^2}}}{D} \right) & \text{pour } r < D \\ 0 & \text{pour } r \geq D, \end{cases} \quad (4.18)$$

pour un disque de diamètre  $D$ , avec  $r$  la variable de translation. L'allure du covariogramme géométrique  $K_D(r)$  est représentée en figure 4.9.

#### Covariogramme géométrique moyen d'une population mono-dispersée

L'évolution du profil du covariogramme géométrique avec la taille des disques est illustrée sous la forme d'un faisceau de courbes en figure 4.10(a). Un faisceau de profils de covariogrammes géométriques moyens obtenus par autocovariance d'hologrammes simulés de 20 particules est également représenté en figure 4.10(b). Les deux faisceaux présentent une zone de quasi-linéarité dans laquelle la dépendance au diamètre est linéaire.

#### Covariogramme géométrique moyen d'une population poly-dispersée

Dans le cas de populations poly-dispersées, le covariogramme géométrique moyen  $\bar{k}$  ne correspond plus au simple covariogramme géométrique d'un disque et est donné par la relation

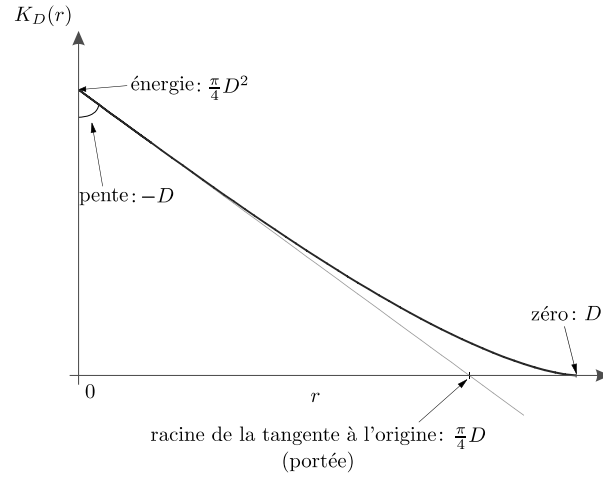
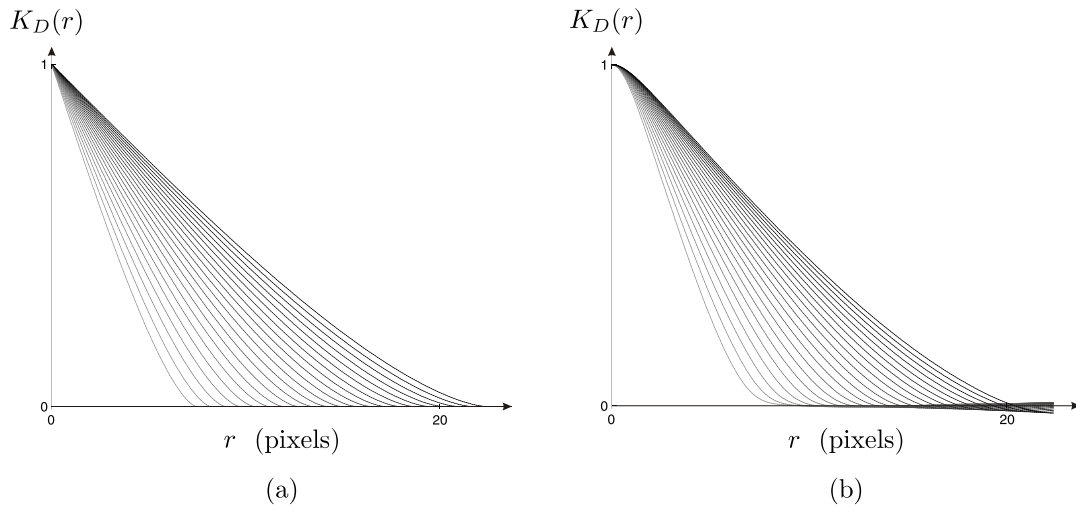


Fig. 4.9 — Covariogramme géométrique d'un disque.



**Fig. 4.10** — Évolution du covariogramme géométrique avec le diamètre  $D$  des particules : (a) faisceau de courbes des covariogrammes géométriques  $K_D(r)$  pour  $D$  variant de  $50$  (courbe gris clair) à  $150\mu m$  (courbe noire), les courbes sont calculées à partir de l'équation 4.18 ; (b) faisceau de courbes des covariogrammes géométriques moyens estimés à partir d'hologrammes synthétiques de 20 particules de même diamètre  $D$  variant de  $50$  (courbe gris clair) à  $150\mu m$  (courbe noire), les courbes sont calculées à partir d'hologrammes  $1024 \times 1024$  pixels dont la distance aux objets est  $150mm$ . (1 pixel représente  $6.7\mu m$ )



intégrale :

$$\bar{k}(r) = \int K_D(r) f(D) dD, \quad (4.19)$$

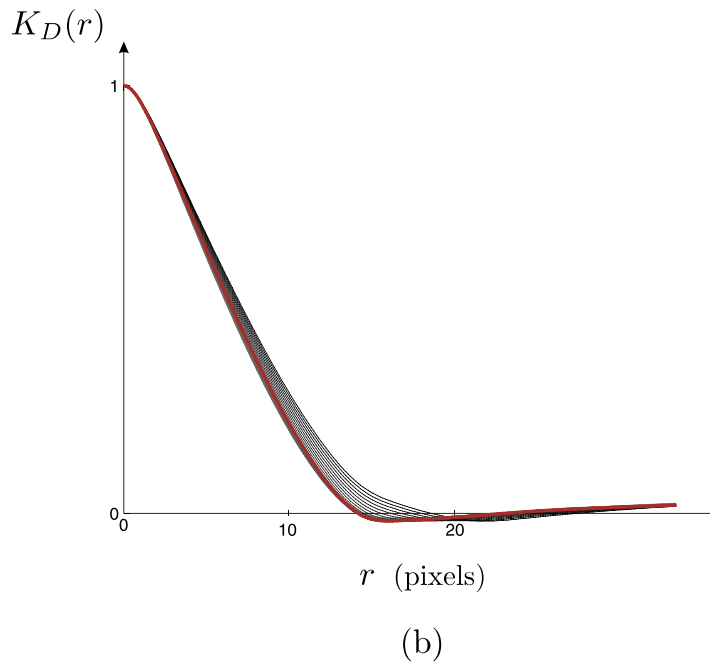
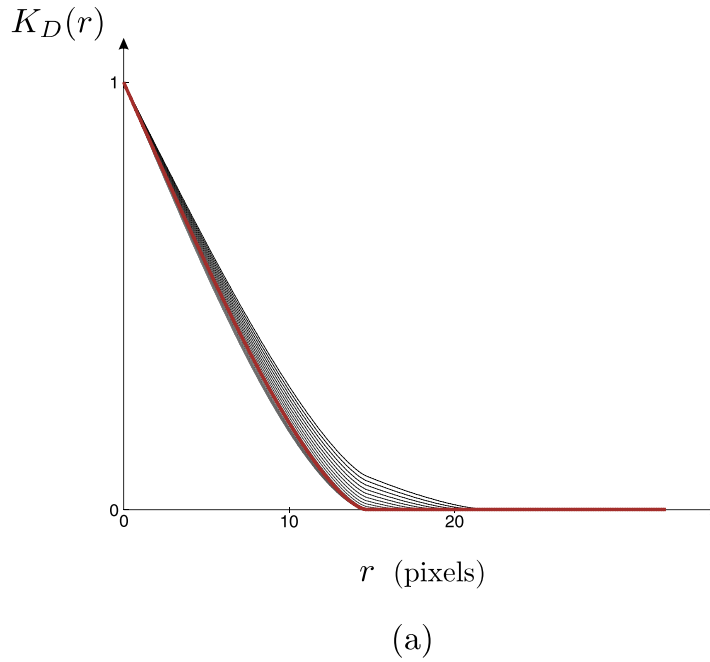
où  $f(D)$  désigne la distribution de probabilité des diamètres.

La figure 4.11 illustre le cas de populations polydispersées dont 80% des particules ont un diamètre constant de  $100\mu m$  et les 20% restants ont un diamètre fixé à une valeur comprise entre  $50\mu m$  (courbe gris clair) et  $150\mu m$  (courbe noire). L'amplitude du covariogramme géométrique d'un disque est proportionnelle à  $D^2$ , par conséquent les particules de grande taille ont plus de poids que celles de petit diamètre. Une courbe rouge symbolisant le covariogramme géométrique moyen de la population mono-dispersée ( $D = 100\mu m$ ) de référence est représentée sur chacun des faisceaux. Sur chacun des faisceaux on peut noter que les populations polydispersées dont la taille moyenne est inférieure à  $100\mu m$  donnent des covariogrammes géométriques moyens extrêmement proches de la courbe rouge de référence. Les populations polydispersées dont 20% des particules ont une taille supérieure à  $100\mu m$  se distinguent quant à elles plus facilement de la courbe rouge, notamment sur l'intervalle  $r > 100\mu m$ . Cette zone est cependant fortement perturbée par les différents termes que l'on néglige dans l'approximation de  $\bar{k}$  à partir de la covariance d'un hologramme. Elle n'est donc pas facilement exploitable. De plus, plusieurs effets dépendants de la taille des objets interviennent : les termes non-linéaires, plus importants dans le cas d'objets de grande taille, ainsi que les effets de troncature intervenant de manière plus importante quand les objets sont petits (la figure de diffraction est alors plus étendue).

Les courbes théoriques et issues de simulations des figures 4.10 et 4.11 semblent indiquer qu'une analyse du covariogramme géométrique moyen peut être menée pour estimer la taille moyenne de particules dans le cas de populations mono-dispersées ou faiblement polydispersées. La zone de quasi-linéarité que nous avons identifiée sur les courbes de la figure 4.10 peut être exploitée pour remonter par régression linéaire au diamètre d'une population de particules monodispersée. Les faisceaux de courbes de la figure 4.11 permettent de prévoir une surestimation du diamètre moyen s'il est calculé avec une hypothèse de population monodispersée et que cette hypothèse n'est pas vérifiée en pratique.

### 3.2 Analyse de l'orientation d'objets anisotropes

Nous avons rappelé dans le paragraphe 1 que le covariogramme géométrique moyen était porteur d'informations sur la distribution d'orientation dans le cas d'objets anisotropes. Si une population d'objets présente une orientation privilégiée, alors le covariogramme géométrique moyen (CGM) de ses ouvertures sera anisotrope et la direction de son maximum angulaire correspondra qualitativement à l'orientation privilégiée des projections des objets. Nous décrivons dans cette partie comment analyser quantitativement le CGM et nous proposons une approche pour remonter à la distribution d'orientation 3D d'objets anisotropes tous identiques.



**Fig. 4.11** — Évolution du covariogramme géométrique moyen d'une population polydispersée composée à 80% de particules de  $100\mu m$  de diamètre et à 20% de particules de  $50\mu m$  diamètre (courbe gris clair) jusqu'à  $150\mu m$  de diamètre (courbe noire). La population monodispersée de référence est représentée en rouge. (a) faisceau de courbes calculées à partir des équations 4.18 et 4.19 ; (b) faisceau des covariogrammes géométriques moyens estimés à partir d'hologrammes synthétiques de 200 particules (hologrammes  $512 \times 512$  pixels dont la distance aux objets est  $150mm$ ). Les covariogrammes géométriques moyens estimés (fig. (b)) prennent des valeurs légèrement négatives pour  $r$  entre 15 et 30 pixels à cause de l'influence du terme jumeau (terme (b) de l'équation 4.17). (1 pixel représente  $6.7\mu m$ )

Le CGM, obtenu à partir d'un hologramme par calcul de son autocovariance (paragraphe 2.3) porte l'information d'orientation, de taille et de forme des ouvertures des objets. Ces différentes informations sont toutefois mélangées, rendant le CGM difficile à interpréter. Deux approches sont possibles pour mettre en évidence l'information d'orientation :

- calcul et analyse de la rose des intercepts,
- inversion du CGM.

Nous décrivons ces deux approches dans les paragraphes suivants.

### 3.2.1 Calcul et inversion de la rose des intercepts

La rose des intercepts (cf. paragraphe 1.2) est une distribution fréquemment utilisée lors de l'étude de l'anisotropie en analyse d'image car elle est facilement calculable (section 1). Dans notre cas, nous pouvons obtenir la rose des intercepts  $\gamma$  directement à partir du covariogramme géométrique moyen  $\bar{k}$  grâce à la relation suivante [Ser82] :

$$\gamma(\alpha) = - \left. \frac{\partial \bar{k}(r, \alpha)}{\partial r} \right|_{r=0}. \quad (4.20)$$

La rose des intercepts peut ensuite être inversée pour obtenir la rose des orientations en appliquant une des techniques décrites dans la littérature (voir [KP05] pour une synthèse des techniques possibles).

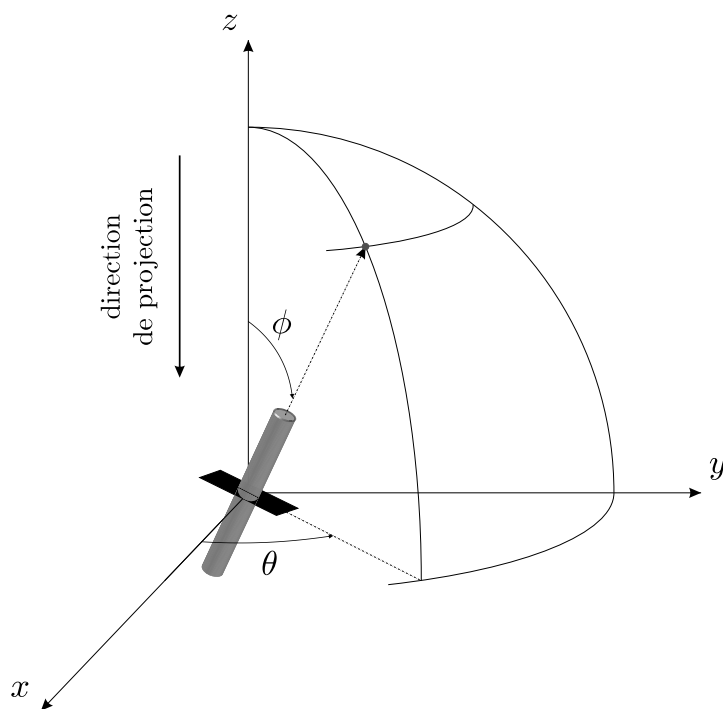
Cette approche est cependant limitée par la difficulté d'obtenir une bonne estimation de la dérivée en zéro du CGM car la présence de bruit non corrélé dans l'hologramme se traduit par une discontinuité à l'origine de l'autocovariance. De plus, le CGM est alors sous-utilisé puisque seule la valeur de sa dérivée à l'origine est exploitée, ce qui est dommageable pour la nécessaire étape d'inversion. Afin d'éviter ces inconvénients, nous décrivons dans les paragraphes suivants une approche plus générale se basant sur le CGM tout entier.

### 3.2.2 Inversion du covariogramme géométrique moyen

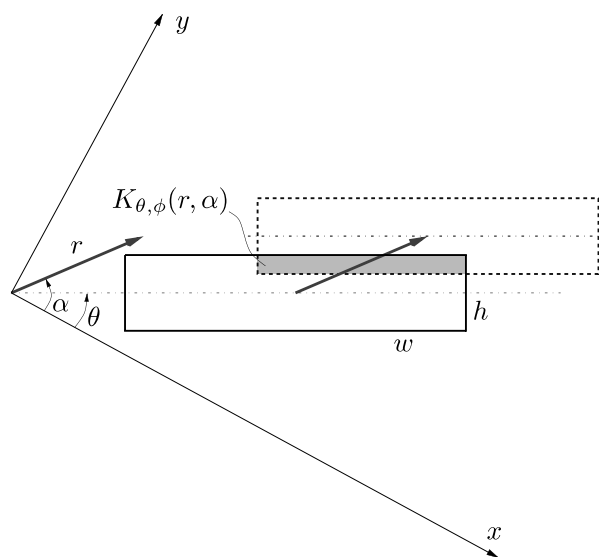
Nous allons établir la relation liant le CGM et la distribution de probabilité de taille et d'orientation de la population d'objets. Les calculs et les illustrations seront réalisés dans le cas d'objets très anisotropes : des fibres courtes que nous modéliserons sous la forme de cylindres. La démarche reste évidemment générale et est applicable de la même manière à n'importe quel autre type d'objet anisotrope.

**Formulation du problème inverse** Définissons une fibre courte par l'intermédiaire de son orientation 3D  $(\theta, \phi)$  exprimée en coordonnées sphériques, sa longueur  $L$  et son diamètre  $t$  (figure 4.12). Sa projection suivant l'axe des  $z$  peut être approximée par un rectangle de hauteur  $h = t$  et de largeur  $w = L \sin \phi + t \cos \phi$ .

Le covariogramme géométrique  $K(r, \alpha)$  d'un rectangle de dimensions  $w \times h$  orienté suivant la direction  $\theta$  est l'aire commune entre le rectangle et son translaté par le vecteur de longueur  $r$  et de direction  $\alpha$  (figure 4.13) :



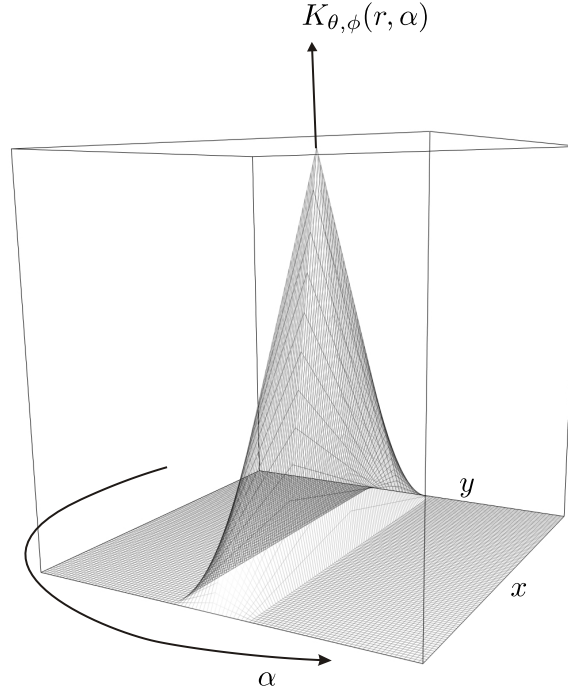
**Fig. 4.12** — Modèle géométrique d'une fibre et sa projection dans le plan  $(x, y)$ . L'orientation 3D de la fibre est représentée sur la sphère par un point rouge de coordonnées sphériques  $(\theta, \phi)$ .



**Fig. 4.13** — Calcul du covariogramme géométrique  $K(r, \alpha)$  d'un rectangle (partie grisée).

$$\begin{cases} K_{t,L,\theta,\phi}(r, \alpha) = (w - r|\cos(\alpha - \theta)|)(h - r|\sin(\alpha - \theta)|) \\ \quad \text{si } w - r|\cos(\alpha - \theta)| \geq 0 \text{ et } h - r|\sin(\alpha - \theta)| \geq 0; \\ K_{t,L,\theta,\phi}(r, \alpha) = 0 \text{ sinon.} \end{cases} \quad (4.21)$$

Une représentation graphique du covariogramme géométrique est donnée en figure 4.14.



**Fig. 4.14** — Représentation du covariogramme géométrique  $K(r, \alpha)$  d'un rectangle sous la forme d'une surface.

Comme la contribution de chacune des fibres s'ajoute pour former le covariogramme géométrique moyen  $\bar{k}$ , il est lié à la distribution de taille et d'orientations  $f(t, L, \theta, \phi)$  par la relation intégrale suivante :

$$\underbrace{\bar{k}(r, \alpha)}_{\text{données}} = \iiint \underbrace{K_{t,L,\theta,\phi}(r, \alpha)}_{\text{modèle}} \underbrace{f(t, L, \theta, \phi)}_{\text{inconnues}} dt dL d\theta d\phi + \underbrace{n(r, \alpha)}_{\text{bruit}}. \quad (4.22)$$

Cette équation relie les données aux inconnues et souligne la nature “problème inverse” de la reconstruction de la distribution  $f$ . Le covariogramme géométrique  $K_{t,L,\theta,\phi}(r, \alpha)$  représente le modèle de l'influence de la forme/taille/orientation sur le CGM et est connu analytiquement. Puisque le CGM est obtenu à partir de données expérimentales et grâce à une approximation, nous introduisons un terme de bruit qui représente la différence entre la modélisation et les données réelles. Notons que nous pouvons améliorer la modélisation en remplaçant l'expression analytique  $K_{t,L,\theta,\phi}(r, \alpha)$  par le calcul du covariogramme à partir d'hologrammes simulés afin de prendre en compte certains termes négligés dans l'approximation fournissant  $\bar{k}$ .

**Discrétisation du problème** Nous décrivons dans ce paragraphe comment l'équation 4.22 peut être échantillonnée.

Le nombre de paramètres doit tout d'abord être réduit afin de limiter la taille du domaine de recherche. Deux sous-problèmes peuvent être étudiés :

- (P1) reconstruire la distribution des orientations 3D pour une population d'objets identiques (i.e.  $t$  et  $L$  sont connus et constants) ;
- (P2) reconstruire la distribution des orientations 2D et des taille des projections pour des fibres de diamètre donné (i.e.  $t$  est connu et constant et seules les orientations des projections sont recherchées).

Ces deux problèmes sont équivalents puisque la longueur projetée et l'orientation hors plan jouent des rôles équivalents dans l'expression du covariogramme géométrique  $K$ . Nous décrivons par conséquent uniquement la reconstruction de  $f(\theta, \phi)$  dans le cas de fibres de longueur identique (problème P1). Les résultats obtenus peuvent être directement adaptés au problème P2.

Le CGM est estimé sur un disque contenant le support fini du CGM. L'échantillonnage utilisé est cartésien puisque l'estimation est basée sur des transformées de Fourier. Le bruit  $n(r, \alpha)$  associé aux données n'est pas stationnaire à cause de la transformation d'autocovariance. Afin de prendre en compte la différence de niveau de bruit entre le centre de l'autocorrélation et les régions correspondant à des distances  $r$  plus importantes, nous introduisons une matrice de pondération  $W$  dont le rôle est de réduire l'influence des échantillons peu fiables à cause du faible rapport signal sur bruit.  $W$  peut être défini dans le cas général comme l'inverse de la matrice de covariance des données :  $W = \text{cov}(\bar{k})^{-1}$ .

La distribution recherchée  $f$  est calculée en des points  $(\theta, \phi)$  choisis. Pour que la solution soit exploitable quantitativement, il faut utiliser un échantillonnage uniforme en  $\theta$ . Un échantillonnage uniforme exprimé en coordonnées sphériques se traduirait par un effet de sur-échantillonnage pour les orientations proches de  $\phi = 0$ . Cette région est cependant mal définie puisque les orientations sont presque colinéaires à la direction de projection. Une forme de régularisation peut être introduite en utilisant un échantillonnage plus lâche que l'échantillonnage uniforme en coordonnées sphériques. Puisque la discrimination entre les orientations est liée à la différence entre les projections, nous proposons de réaliser un échantillonnage uniforme dans l'espace projeté. Si l'on représente les orientations 3D comme des points sur la surface d'une sphère unité (figure 4.12), alors les orientations projetées se trouvent dans un disque. Nous proposons d'échantillonner ce disque suivant une distribution en spirale inspirée de [RSZ94].

La forme discrétisée de l'équation 4.22 s'écrit sous la forme du produit matriciel

suivant :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{k}(r_1, \alpha_1) \\ \vdots \\ \bar{k}(r_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ \bar{k}(r_n, \alpha_m) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{\theta_1, \phi_1}(r_1, \alpha_1) & \cdots & K_{\theta_p, \phi_q}(r_1, \alpha_1) \\ \vdots & & \vdots \\ K_{\theta_1, \phi_1}(r_n, \alpha_1) & \cdots & K_{\theta_p, \phi_q}(r_n, \alpha_1) \\ \vdots & & \vdots \\ K_{\theta_1, \phi_1}(r_n, \alpha_m) & \cdots & K_{\theta_p, \phi_q}(r_n, \alpha_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\theta_1, \phi_1) \\ \vdots \\ f(\theta_p, \phi_1) \\ \vdots \\ f(\theta_p, \phi_q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n(r_1, \alpha_1) \\ \vdots \\ n(r_n, \alpha_1) \\ \vdots \\ n(r_n, \alpha_m) \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{k}} &= \mathbf{K} \mathbf{f} + \mathbf{n} \end{aligned} \quad (4.23)$$

où  $(r_i, \alpha_j)$  représente un point d'échantillonnage dans l'espace d'autocovariance,  $(\theta_k, \phi_l)$  est un point d'échantillonnage dans l'espace des orientations 3D (i.e. un point de la sphère  $\mathbb{S}^2$ ) et les lettres en caractères gras  $\bar{\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{n}$  sont des notations compactes pour les vecteurs et les matrices correspondants.

**Algorithme de reconstruction** De très nombreux algorithmes ont été proposés dans la littérature pour résoudre des problèmes inverses. Le choix d'une approche spécifique nécessite d'analyser les caractéristiques du problème et notamment d'identifier les propriétés générales vérifiées par toutes les solutions possibles : les connaissances *a priori*. Dans le cas de la distribution d'orientation de fibres, une reconstruction n'est intéressante que si il existe un nombre discret d'orientations privilégiées. La distribution des orientations  $f$  est alors proche de zéro pour toutes les orientations sauf celle(s) des fibres. Cette caractéristique de distribution  $f$  nulle sauf autour de certaines orientations et la contrainte de positivité que doit vérifier  $f$  (distribution de probabilité :  $f(\theta, \phi) \geq 0$  pour tout  $(\theta, \phi)$ ) légitiment une approche de type maximum de vraisemblance contraint : la solution  $f^{(\text{ML})}$  est celle qui maximise la vraisemblance sous contrainte de positivité [Thi05] :

$$\begin{aligned} f^{(\text{ML})} &= \arg \max_f \Pr(\bar{k}|f) = \arg \min_f \phi_{\text{ML}}(f), \text{ sujet à } \forall (\theta, \phi), f(\theta, \phi) \geq 0, \\ \text{où } \phi_{\text{ML}}(f) &\text{ désigne la log-vraisemblance : } \phi_{\text{ML}}(f) \propto -\log[\Pr(\bar{k}|f)] + \text{constante} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Des algorithmes itératifs classiques et facilement implémentables permettent de résoudre un tel problème. On les désigne sous le terme d'algorithmes multiplicatifs [LRA02]. Ils diffèrent suivant la nature du bruit  $n$  considéré [Thi05]. Dans le cas d'un bruit poissonnien, deux algorithmes identiques ont été introduits : *Richardson-Lucy Algorithm* (RLA) [Ric72, Luc74] et la procédure d'*Expectation Maximization* (EM) [SV82]. Dans le cas d'un bruit gaussien, l'algorithme *Image Space Reconstruction Algorithm* (ISRA) [DWM86] construit une solution basée sur la relation de récurrence :

$$\mathbf{f}_i^{(k+1)} = \mathbf{f}_i^{(k)} \frac{(\mathbf{K}^T \mathbf{W} \bar{\mathbf{k}})_i}{(\mathbf{K}^T \mathbf{W} \mathbf{K} \mathbf{f}^{(k)})_i}, \quad (4.25)$$

où l'indice  $\cdot_i$  représente le  $i^{\text{ème}}$  élément du vecteur et  $\cdot^T$  est la notation de l'opérateur de transposition. La matrice  $\mathbf{W}$  apparaît clairement comme une matrice de pondération réduisant l'influence des échantillons de données dont la variance de bruit est élevée. Même si le modèle gaussien n'apparaît pas de façon naturelle dans notre cas, le

fait de pouvoir pondérer les données est particulièrement intéressant et dépasse les considérations de validité du modèle gaussien. Les approximations réalisées lors du calcul de  $\bar{k}$  à partir d'un hologramme conduisent en effet à un biais et une variance dépendant des paramètres  $(r, \alpha)$ . Afin de limiter ces distorsions il est possible d'adapter  $\mathbf{W}$  afin de donner un poids plus faible aux échantillons les plus bruités.

## 4 Applications

### 4.1 Détermination de la taille moyenne de gouttelettes

L'algorithme que nous avons décrit dans le chapitre 3 nécessite une connaissance *a priori* de la taille des particules. De plus, le temps de traitement ne permet pas d'envisager un suivi en ligne de la taille moyenne de gouttelettes. Une analyse directe des hologrammes basée sur le principe décrit dans les paragraphes précédents permet d'accéder rapidement à la taille moyenne  $D$ .

Nous illustrons les résultats obtenus sur des hologrammes synthétiques et sur des hologrammes réels.

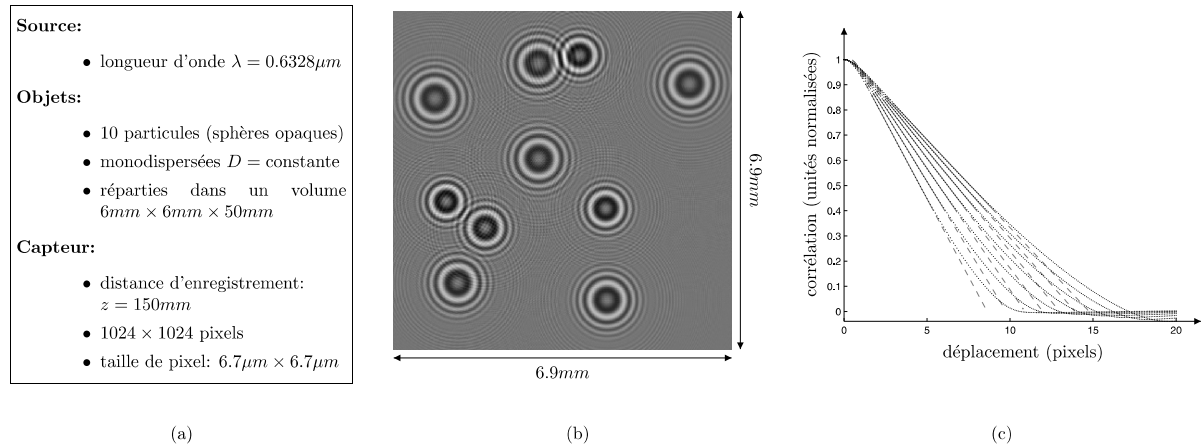
#### 4.1.1 Résultats obtenus sur des hologrammes simulés

Puisque les termes perturbatifs décrits dans la section 2.3 sont presque négligeables dans l'intervalle  $[0, D]$  de l'autocovariance, nous traitons celle-ci comme si elle n'était formée que du terme (a) de l'équation 4.17. Afin d'améliorer la robustesse de la technique, nous n'utilisons pas directement la portée géostatistique (racine de la tangente à l'origine, cf. section 1.1) mais la racine d'une droite obtenue par ajustement sur l'intervalle  $[D/5, 3D/5]$ . Cet intervalle est choisi afin de minimiser l'influence des termes perturbatifs. La correspondance entre la racine trouvée et le diamètre réel des particules est fixée lors d'une étape de calibrage. Cette étape consiste en le calcul de la racine pour des diamètres connus.

Les paramètres expérimentaux utilisés pour la simulation numérique sont décrits en figure 4.15(a). La position de 10 particules a été tirée aléatoirement dans un volume de  $50mm$  de profondeur. Toutes les particules sont de même taille pour un hologramme donné. Des hologrammes de particules de différentes tailles ont été générés. Pour chacune des tailles, 25 réalisations indépendantes des distributions spatiales ont été tirées, conduisant à l'étude de 175 hologrammes.

Un échantillon des hologrammes traités est illustré en figure 4.15(b). Bien que toutes les particules aient la même taille, les figures d'interférences varient fortement d'une particule à l'autre à cause de la profondeur du volume étudié (de  $100$  à  $150mm$ ). Les profils moyens de corrélation des hologrammes pour chacun des diamètres étudiés (de  $70$  à  $130\mu m$  par pas de  $10\mu m$ ) sont tracés en figure 4.15(c). La courbe inférieure correspond au plus petit diamètre de la série :  $70\mu m$ , tandis que la courbe supérieure est reliée au plus grand diamètre ( $130\mu m$ ). La dépendance linéaire des pentes de chacune des courbes est clairement visible.





**Fig. 4.15** — Extraction de l'information de taille moyenne sur des hologrammes simulés : (a) paramètres de la simulation ; (b) un échantillon des hologrammes générés ; (c) profils moyens d'autocovariance utilisés pour la détermination de la taille moyenne (1 pixel représente  $6.7\mu m$ ).

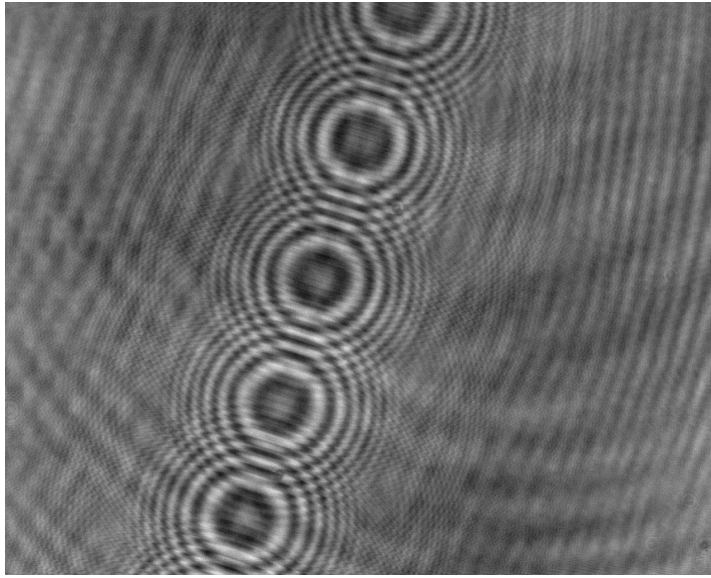
Des résultats quantitatifs sont affichés dans le tableau 4.1. Pour chacun des diamètres apparaissant dans la première ligne du tableau, 25 hologrammes ont été générés. Les erreurs absolues et relatives ont été calculées. Leur valeur moyenne est présentée pour chaque diamètre dans les deux dernières lignes du tableau. Une étape de calibrage numérique (génération et analyse d'un hologramme simulé d'une particule de  $90\mu m$  de diamètre) a été réalisée préalablement au traitement. L'erreur relative reste faible (inférieure à 4%) pour toute l'étendue des diamètres.

Diamètre ( $\mu m$ )	70	80	90	100	110	120	130
Erreur absolue* ( $\mu m$ )	1.6	1.7	0.8	1.0	1.7	3.2	4.8
Erreur relative* (%)	2.3	2.1	0.9	1.0	1.5	2.7	3.7

\*Les erreurs affichées sont des erreurs moyennes sur 25 hologrammes simulés avec les mêmes paramètres.

**Tab. 4.1** — Résultats de la technique d'extraction de taille moyenne sur des hologrammes simulés. La première ligne du tableau donne les diamètres exacts (en  $\mu m$ ) des particules utilisés pour synthétiser les hologrammes. Les deux lignes suivantes présentent les erreurs commises par l'algorithme d'analyse de l'autocovariance des hologrammes.

Les simulations numériques tendent à montrer que la méthode est valable lorsqu'elle est appliquée sur des simulations réalistes d'hologrammes. Ces simulations tiennent compte des interférences entre les figures de diffraction de chacune des particules, c'est à dire que le terme non-linéaire de l'équation 1.9 est présent dans les hologrammes simulés et contribue au bruit pour l'extraction de la taille moyenne. Deux contributions importantes du bruit ne sont cependant pas prises en compte dans ces simulations : le bruit non corrélé (bruit de détecteur et bruit de photon) et le bruit corrélé des franges d'interférences parasites dues aux éléments du montage. Nous décrivons dans la section



**Fig. 4.16** — Hologramme expérimental de gouttelettes produites par un injecteur piezo-électrique.

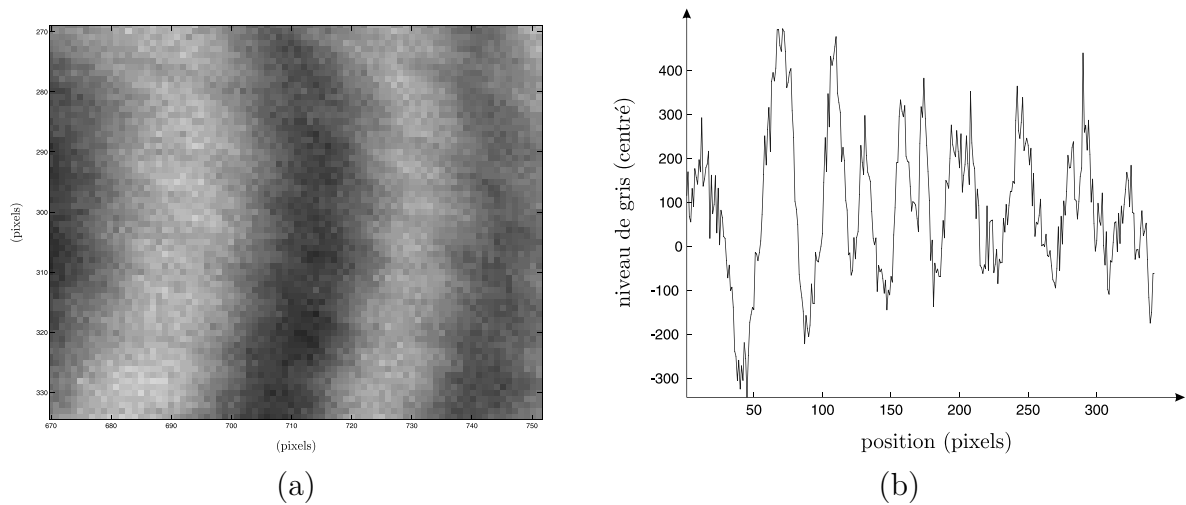
suivant le résultat d'hologrammes expérimentaux présentant ces deux types de bruit.

#### 4.1.2 Traitement d'une série d'hologrammes expérimentaux de gouttelettes mono-dispersées

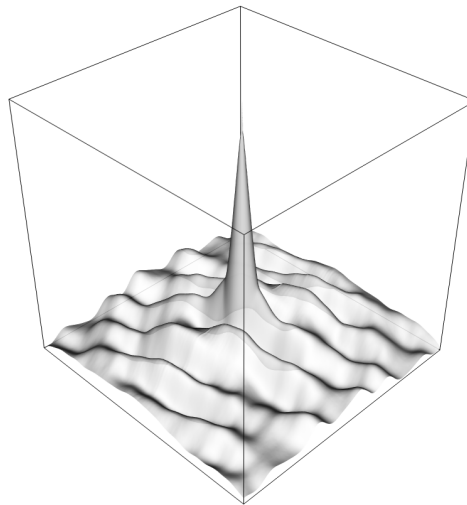
Nous proposons d'analyser la série de 100 hologrammes traités dans le chapitre 3 afin d'évaluer l'erreur systématique (biais) et l'erreur aléatoire (écart-type) de la mesure de diamètre par la technique d'analyse de l'autocovariance d'un hologramme. Les gouttelettes étudiées ont été générées par un injecteur piezo-électrique fonctionnant en mode mono-dispersé. L'analyse de ces hologrammes par l'approche développée dans le chapitre 3 a permis de mesurer la taille des gouttelettes :  $94\mu\text{m} \pm 1\mu\text{m}$  (figure 3.9).

Un des hologrammes de la série est représenté en figure 4.16. Il s'agit d'hologrammes peu concentrés (5 gouttelettes dans le champ de l'hologramme), mais dont le fond présente des franges parasites dues à la lame de verre protectrice du capteur CCD. De plus, les images présentent du bruit non corrélé. La figure 4.17 illustre la présence de ce bruit sur une zone de l'hologramme (figure 4.17(a)) et sur le profil des niveaux de gris de l'hologramme.

Les franges d'interférences dues à la lame de verre sont de période constante, elle conduisent donc à l'apparition d'oscillations de même période dans l'autocovariance de l'hologramme : figure 4.18. Leur période est toutefois supérieure à la taille des gouttelettes. Ces franges modifient l'autocovariance dans l'intervalle  $[D/5, 3D/5]$  et contribuent significativement au biais de la mesure par analyse de l'autocovariance. La figure 4.19 illustre l'effet des franges parasites sur l'estimation de la taille moyenne : trois courbes sont représentées : le profil moyen de l'autocovariance d'un des hologrammes expérimentaux de la série étudiée (courbe en trait continu épais), le profil calculé à partir d'un hologramme synthétique généré à partir des positions des particules détectées à

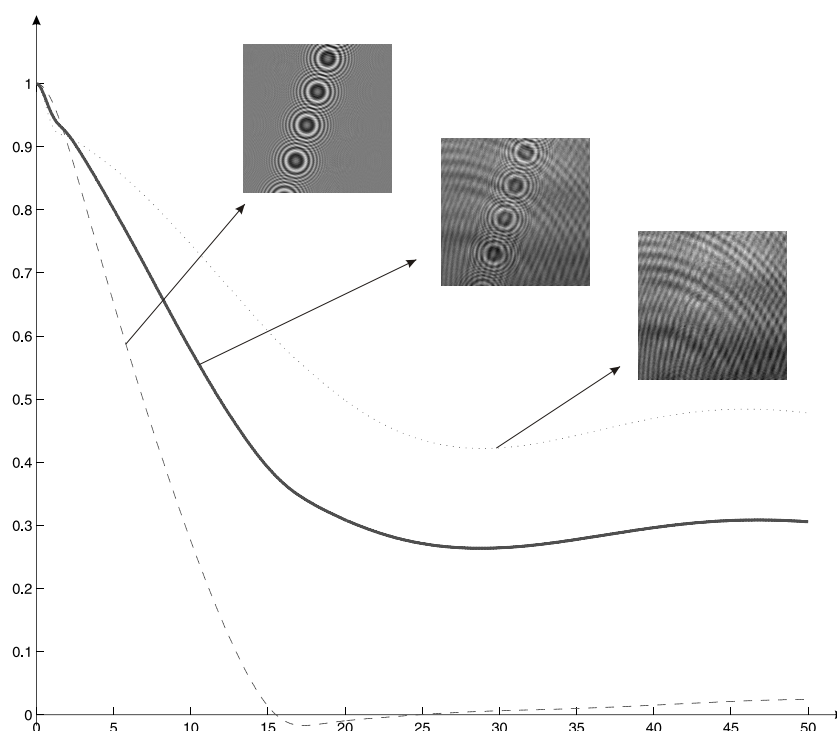


**Fig. 4.17** — Bruit non corrélé corrompant l'hologramme de la figure 4.16 : (a) zoom sur une région de l'hologramme ; (b) profil des niveaux de gris le long d'un segment horizontal dont une des extrémités se trouve au centre d'un système d'anneaux et l'autre se trouve à l'extérieur (1 pixel représente  $6.7\mu m$ ).



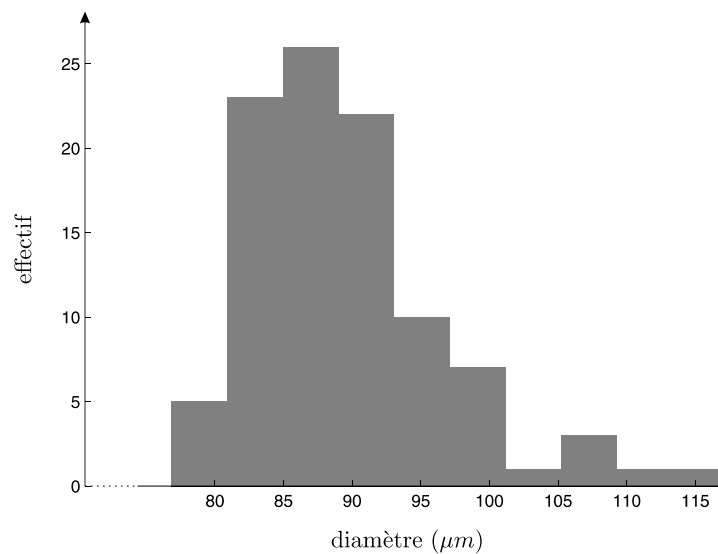
**Fig. 4.18** — Autocovariance de l'hologramme expérimental présenté en figure 4.16. Les oscillations parasites sont dues aux franges d'interférences créées par la lame de verre protectrice du capteur CCD. Ces oscillations constituent la contribution la plus importante dans l'autocovariance illustrée ici.

l'aide de l'algorithme décrit dans le chapitre 3 (courbe en pointillés), et le profil calculé à partir de l'image des résidus après soustraction du modèle de l'hologramme à l'hologramme expérimental (courbe en points). Les franges parasites présentes dans l'hologramme expérimental et dans l'image des résidus biaisent le covariogramme géométrique moyen. La présence de franges parasites représentent une limite pour l'application de cette technique de mesure de taille moyenne. Les franges peuvent être dans la plupart des cas supprimées (ou fortement atténuées) par soustraction d'une image de fond.



**Fig. 4.19** — Limite de la technique d'estimation de taille moyenne : influence des franges parasites. La courbe en trait plein est le profil moyen de l'autocovariance d'un des hologrammes expérimentaux de la série analysée. Ce profil est biaisé par la présence des franges parasites (profil correspondant représenté en points) et s'écarte de la courbe idéale (profil de l'hologramme non bruité représenté en pointillés). L'hologramme non bruité a été calculé grâce à l'algorithme décrit dans le chapitre 3, l'image des résidus contenant les franges parasites a été déduite en retranchant l'hologramme non bruité à l'hologramme expérimental.

L'histogramme des tailles obtenues par la technique d'analyse globale de l'hologramme (i.e. analyse de l'autocovariance) est présenté en figure 4.20, à comparer à l'histogramme de la figure 3.9 obtenu par analyse fine et gouttelette à gouttelette de l'hologramme (i.e. détection optimale suivie d'un raffinement par optimisation locale). L'approche globale conduit à une mesure biaisée. Le biais des mesures réalisées sur la série de 100 hologrammes, calculé en prenant les résultats du chapitre 3 comme référence, vaut  $4\mu m$  avec un écart-type de  $7\mu m$ . La mesure de taille est donc réalisée à 10% près. Cette mesure est environ 10 fois moins précise que celle développée au chapitre 3. Le temps de traitement est cependant considérablement réduit : de quelques dizaines de minutes à quelques secondes. L'approche globale est à considérer suivant les contraintes de l'application soit comme permettant un traitement rapide (en ligne), soit comme une première étape fournissant un *a priori* du diamètre des particules, nécessaire aux algorithmes du chapitre 3.



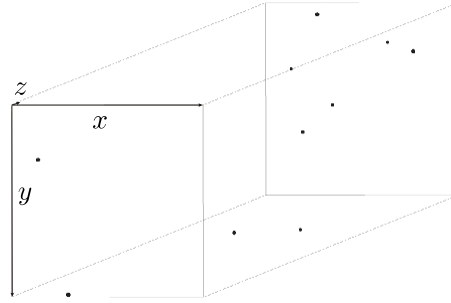
**Fig. 4.20** — Histogramme de la taille moyenne des gouttelettes calculée pour chacun des 100 hologrammes de la série. Le diamètre moyen vaut  $90\mu m$  et l'écart-type  $7\mu m$  soit un écart-type relatif de 7%.

#### 4.1.3 Traitement d'un hologramme expérimental d'un nuage de gouttelettes poly-dispersées

Nous avons illustré la technique sur des hologrammes simulés et expérimentaux de gouttelettes de diamètre constant. Il reste à évaluer la technique lorsque la population de gouttelettes est polydispersée en diamètre.

L'ensemble d'objets étudié est un nuage de gouttelettes produit par un vaporisateur d'eau. L'hologramme a été obtenu avec un laser YAG pulsé de  $532nm$ , fournissant des impulsions lumineuses de  $7ns$ . La caméra utilisée a une dynamique de 12 bits et une matrice de pixels  $1024 \times 1280$  ( $6.7\mu m$  de large, taux de remplissage de 1). La région d'intérêt traitée, de  $830 \times 744$  pixels, est représentée en figure 4.22(a). La localisation 3D des gouttelettes ainsi que la mesure de leur diamètre ont été réalisées avec un algorithme de reconstruction classique (restitution numérique du volume 3D, segmentation puis détermination du centre de gravité des particules segmentées). Le volume 3D reconstruit est représenté en figure 4.21. Le nuage de gouttelettes est profond de  $60mm$ , le diamètre des particules varie de  $80$  à  $110\mu m$  (tableau 4.2). Le diamètre moyen des gouttelettes est estimé par la technique classique à  $84\mu m$ .

L'autocovariance de l'hologramme est tracée en figure 4.22(b). Le bruit blanc se somme au centre de l'autocovariance. D'après le profil moyen, le rapport signal sur bruit dans l'hologramme vaut environ 5. L'extraction directe de la taille par analyse de l'autocovariance conduit à un diamètre de  $91\mu m$ . Cette taille apparaît surestimée, ce qui est facilement compréhensible puisque la population est polydispersée. Nous avons pu vérifier sur les courbes simulées de la figure 4.11 l'influence des particules les plus grandes sur le profil d'autocovariance. Il est envisageable de corriger le biais dû à la dispersion de diamètres en introduisant une distribution de diamètre *a priori*. L'estimation des



**Fig. 4.21** — Reconstruction du volume de gouttelettes correspondant à l'hologramme expérimental 4.22(a).

paramètres de la distribution peut alors être réalisée par ajustement. Une telle correction n'est cependant possible que si la population de particules est suffisamment large.

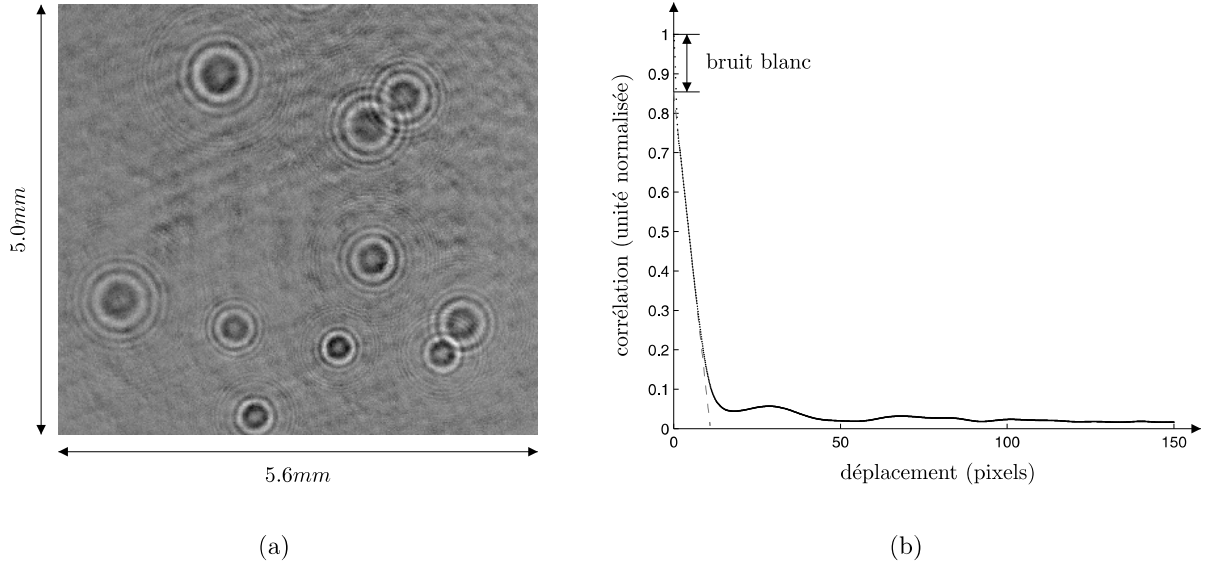
Particule		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Position	x (mm)	3.326	2.287	4.460	2.061	3.658	4.694	4.023	3.610	0.737	1.884
	y (mm)	3.972	4.754	4.046	3.738	2.955	3.692	1.073	1.403	3.428	0.809
	z (mm)	40.0	45.8	47.5	49.5	65.0	69.6	69.8	81.0	95.4	101.3
Diamètre ( $\mu\text{m}$ )		79	91	96	65	79	71	79	81	89	108

**Tab. 4.2** — Position et taille de chacune des gouttelettes de l'hologramme expérimental de la figure 4.22(a). Les données affichées ont été obtenues par une analyse classique.

## 4.2 Reconstruction de la distribution d'orientation de fibres

Le modèle de fibres que nous avons introduit dans la section 3.2 peut être appliqué à différents types d'objets. La contrainte principale est que les fibres doivent être rectilignes, ce qui est souvent le cas lorsque les fibres sont suffisamment courtes (longueur inférieure au millimètre). Nous avons étudié des fibres de papier dans la perspective de pouvoir réaliser une étude en ligne de l'orientation des fibres de papier lors de la première phase de la fabrication du papier. Cette phase consiste en la formation d'un jet laminaire du mélange eau + fibres de papier et charges (adjuvants permettant d'augmenter la densité du papier et de modifier certaines de ses propriétés). L'anisotropie du papier fini dépend notamment de la répartition des orientations des fibres à la sortie de la caisse de tête (c'est à dire à la fin de la première étape).

La démarche présentée dans la section 3.2 est illustrée ici sur des données simulées puis réelles. Le schéma de principe permettant de reconstruire la rose des orientations 3D d'une population de fibres de taille constante (calibrées) est représenté en figure 4.23. Un hologramme est traité en deux étapes : tout d'abord, le CGM est estimé ; ensuite, le CGM est inversé afin de reconstruire la distribution des orientations. Nous décrivons dans la section suivante des résultats obtenus sur un hologramme simulé. Le cas de fibres de longueur variable est illustré dans la section 4.2.2 par calcul de la rose des intercepts.



**Fig. 4.22** — Extraction de l'information de taille moyenne d'un hologramme expérimental de gouttelettes : (a) hologramme ; (b) profil moyen d'autocovariance (1 pixel représente  $6.7\mu m$ ).

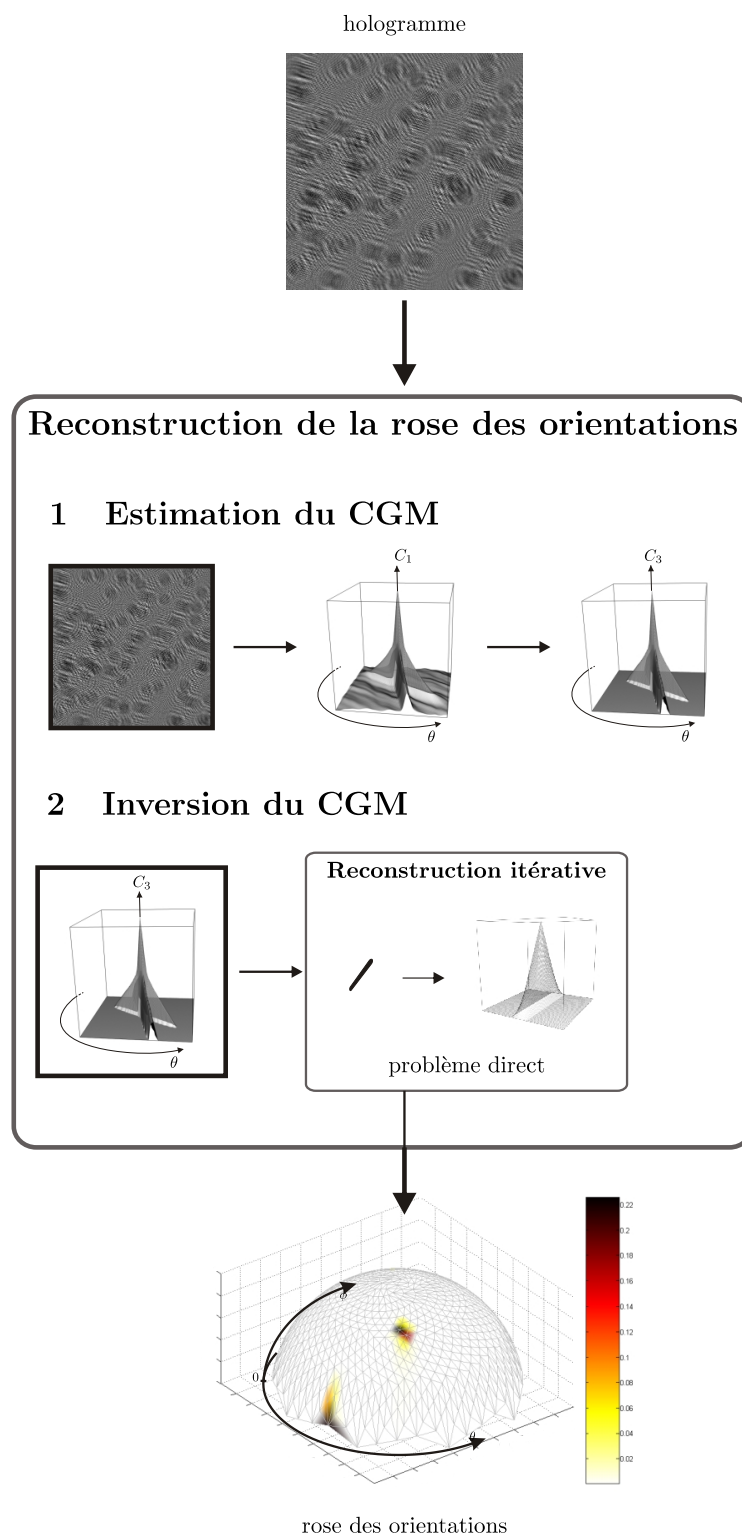
#### 4.2.1 Analyse d'hologrammes simulés d'une population de fibres calibrées

La simulation numérique d'un hologramme de fibres permet de disposer de données pour lesquelles la rose des orientations est connue. Une comparaison entre la rose reconstruite et la rose exacte utilisée pour générer l'hologramme permet de valider l'algorithme de reconstruction.

**Population de fibres** 100 fibres ont été distribuées aléatoirement (loi uniforme) dans un volume  $7mm \times 7mm \times 7mm$  (figure 4.24(a)). Les fibres sont orientées selon deux directions privilégiées :  $(\theta_1, \phi_1) = (57^\circ, 30^\circ)$  et  $(\theta_2, \phi_2) = (18^\circ, 83^\circ)$ . Les deux tiers des fibres ont une orientation proche de la valeur moyenne  $(\theta_1, \phi_1)$ , avec un écart-type de  $4^\circ$  ; le dernier tiers est orienté selon  $(\theta_2, \phi_2)$  avec un écart-type plus faible ( $1.5^\circ$ ). Les fibres mesurent  $500\mu m$  pour  $20\mu m$  de diamètre. La figure 4.24(a) donne une représentation 3D du volume étudié. La distribution des orientations est donnée par la rose des orientations en figure 4.24(b) : à chaque orientation de fibre est associé un point sur la demi-sphère (voir figure 4.12).

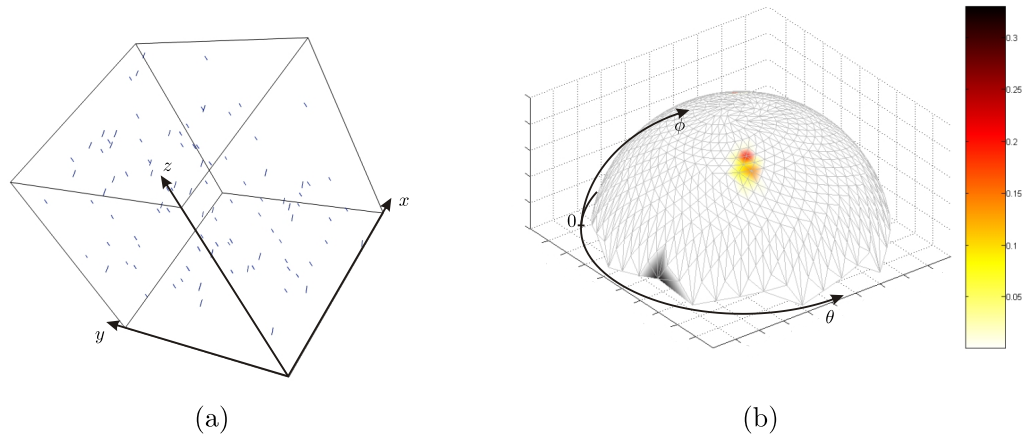
**Hologramme simulé** Un hologramme de fibres est simulé selon l'équation 1.9 modélisant la formation d'un hologramme. La distance entre le volume de fibres et l'hologramme est fixée à  $100mm$ . L'hologramme  $1024 \times 1024$  (pixels de  $6.7\mu m$ ) synthétisé est représenté en figure 4.25. Nous le traitons par le schéma de la figure 4.23 afin d'obtenir une reconstruction de la rose des orientations.

**Estimation du CGM** La première étape consiste en l'estimation du CGM. Nous avons montré que l'autocovariance de l'hologramme est liée au CGM des projections (i.e.

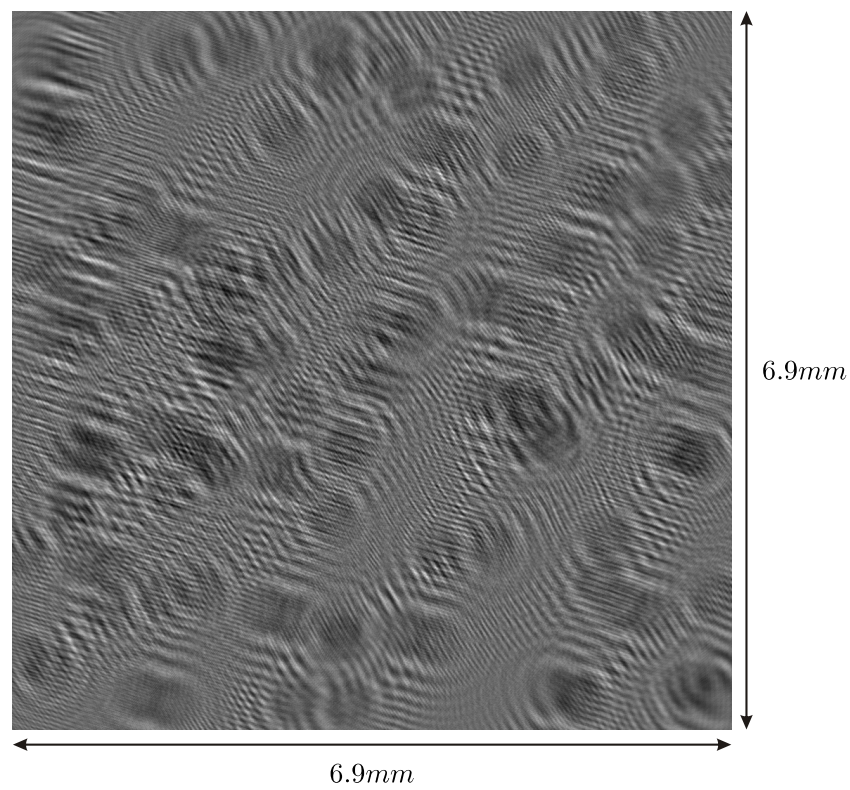


**Fig. 4.23** — Principe de la technique de reconstruction de la rose des orientations 3D à partir d'un hologramme de fibres calibrées (i.e. de taille constante).

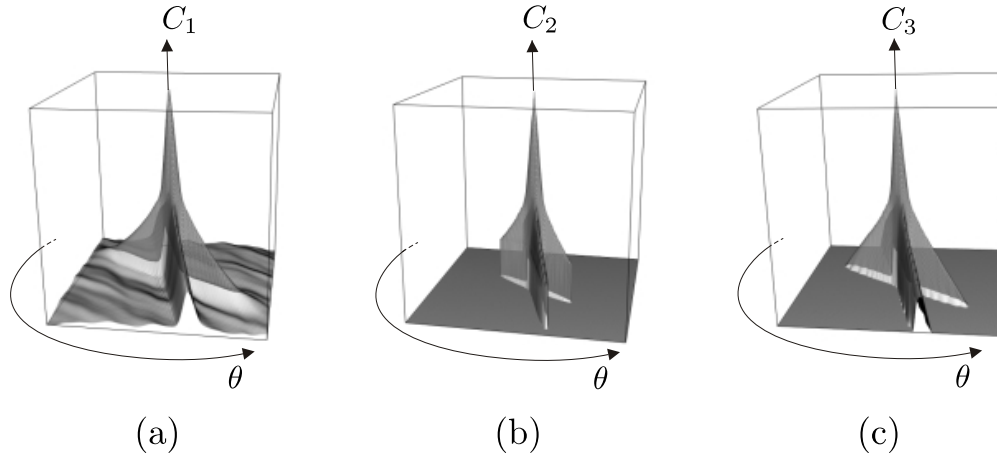




**Fig. 4.24** — Distribution d'objets étudiés : (a) volume de fibres synthétisé ; (b) rose des orientations 3D correspondante.



**Fig. 4.25** — Hologramme simulé à partir du volume présenté en figure 4.24.



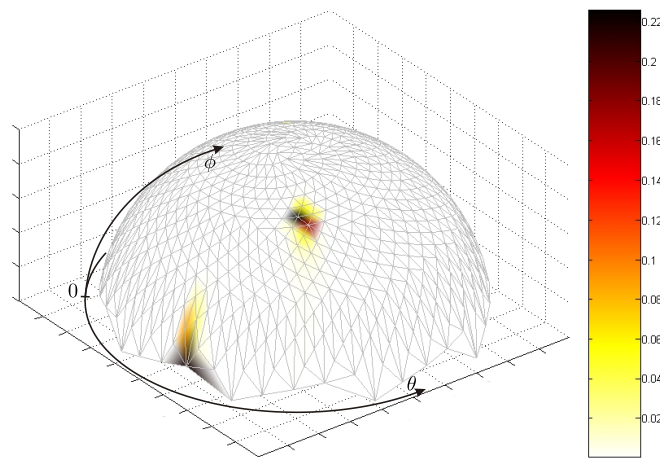
**Fig. 4.26** — Estimation du covariogramme géométrique moyen : (a) autocovariance de l'hologramme ; (b) autocovariance restreinte au domaine de confiance ; (c) estimation du CGM : extrapolation linéaire radiale de (b).

des ouvertures) des fibres. La figure 4.26(a) illustre l'autocovariance de l'hologramme simulé. Des oscillations parasites sont visibles hors du support du CGM (rappelons qu'elles sont dues au MGC “jumeau”, ainsi qu'aux corrélations inter-fibres). Un support de confiance sur lequel le MGC domine le bruit de fond est déterminé par seuillage (figure 4.26(b)). Restreindre les données au seul support de confiance ne garantit pas une convergence rapide de l'algorithme d'inversion dans les étapes suivantes. Nous extrapolons donc les données hors du domaine de confiance (extrapolation linéaire 1D effectuée en coordonnées polaires). Les données obtenues par extrapolation ne sont pas utilisées dans l'étape d'inversion, seul le domaine à partir duquel le MGC est nul est conservé afin d'améliorer le conditionnement du problème.

**Reconstruction de la rose des orientations 3D** Le CGM peut être inversé en utilisant l'équation 4.25. La figure 4.27 présente la rose des orientations reconstruite après un millier d'itérations. La reconstruction est en accord avec la rose théorique présentée en figure 4.24(b). Le traitement complet de l'hologramme prend environ 30 secondes dans une implémentation en langage `Matlab`, sur un PC standard (Pentium 4 3GHz). La vitesse de convergence peut être largement améliorée en utilisant une implémentation en `C` combinée à l'utilisation de techniques accélérant la convergence de l'algorithme d'inversion comme les gradients conjugués non-linéaires ou les méthodes de métriques variables à mémoire limitée [Thi02].

#### 4.2.2 Traitement d'un hologramme expérimental de fibres de papier

Nous illustrons dans cette section le cas de fibres de longueur et d'orientation variables. Nous proposons d'analyser un hologramme expérimental par construction de la rose des intercepts (méthode décrite dans le paragraphe 3.2.1).



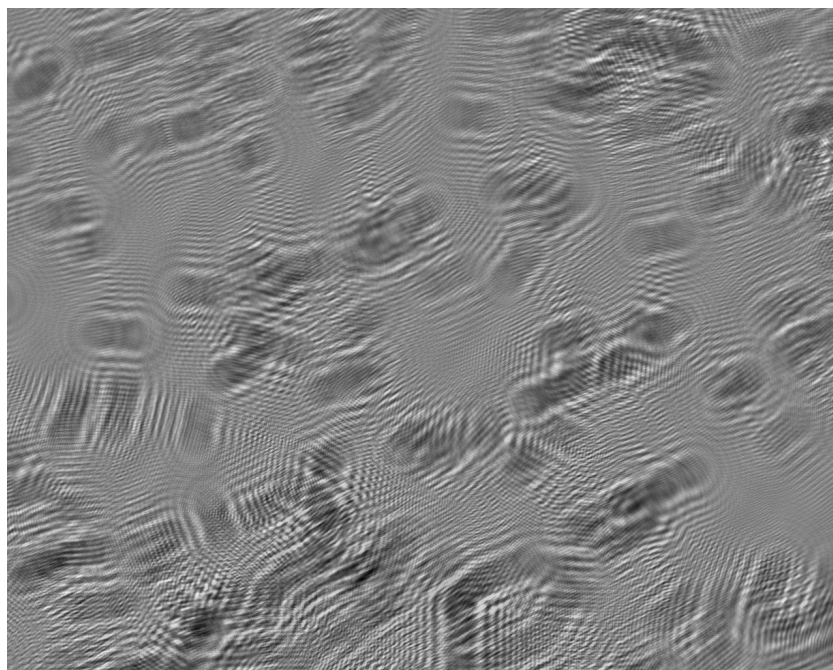
**Fig. 4.27** — Rose des orientations 3D reconstruite à partir de l'hologramme présenté en figure 4.25 par inversion du CGM.

**Objets** Les objets étudiés sont des fibres de papier courtes, réparties sur une lame de verre avec un pinceau. Le choix d'une répartition des fibres dans un même plan a été motivé par la facilité d'analyser le volume restitué numériquement afin de construire la rose des intercepts exacte. Une image de toutes les fibres focalisées peut également être présentée pour des raisons pédagogiques.

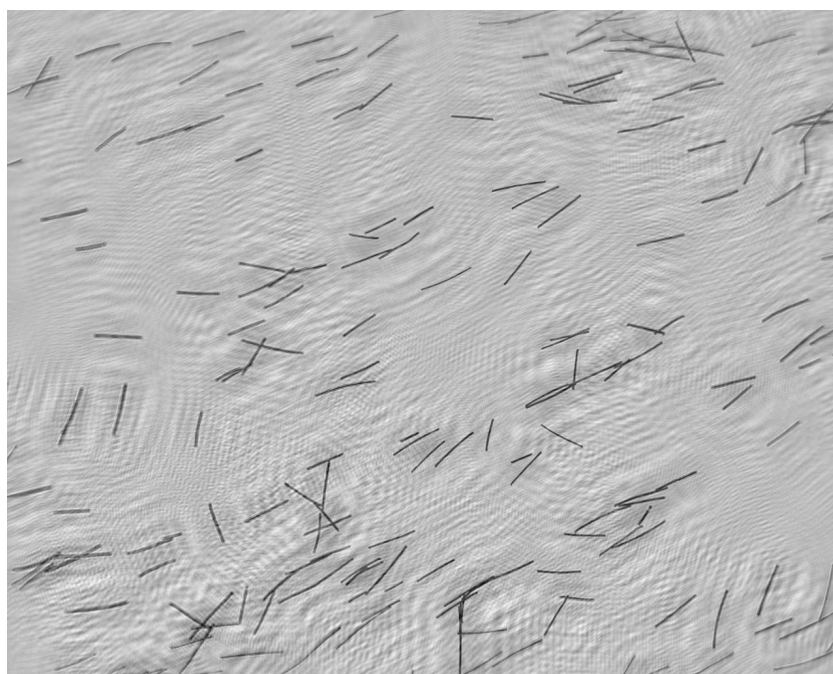
**Hologramme** L'hologramme a été enregistré à  $50mm$  de la lame de verre avec un laser HeNe continu (longueur d'onde  $632nm$ ). La caméra utilisée possède une matrice CCD de  $1024 \times 1280$  pixels (pixels de  $6.7\mu m$  de large). L'hologramme est représenté en figure 4.28(a).

**Rose des intercepts** La rose des intercepts a été construite par deux techniques différentes. Afin de disposer d'une référence pour valider notre technique d'analyse globale d'hologramme, nous avons construit une première rose des intercepts par analyse du volume restitué numériquement. Toutes les fibres se trouvant dans un même plan (figure 4.28(b)), le traitement s'est réduit à la segmentation de ce plan. Nous avons réalisé une segmentation manuelle (i.e. un pointage manuel des extrémités de chacune des fibres) du plan et en avons déduit la rose des intercepts 2D (par application de l'équation 4.8). Cette rose est représentée en rouge dans la figure 4.29.

Une seconde rose des intercepts a été calculée en appliquant la méthode d'analyse directe, c'est à dire par estimation du CGM, puis par estimation par une approche "moindres carrés" [Ser82] de sa dérivée à l'origine (méthode décrite dans le paragraphe 3.2.1). Cette rose est représentée en bleu dans la figure 4.29. L'orientation privilégiée  $y$  est également figurée, elle correspond à celle visible dans le plan restitué numériquement (figure 4.28(b)). La rose des intercepts reconstruite par analyse directe de l'hologramme est en accord avec la rose réelle. Les différences (irrégularités et léger décalage angulaire)

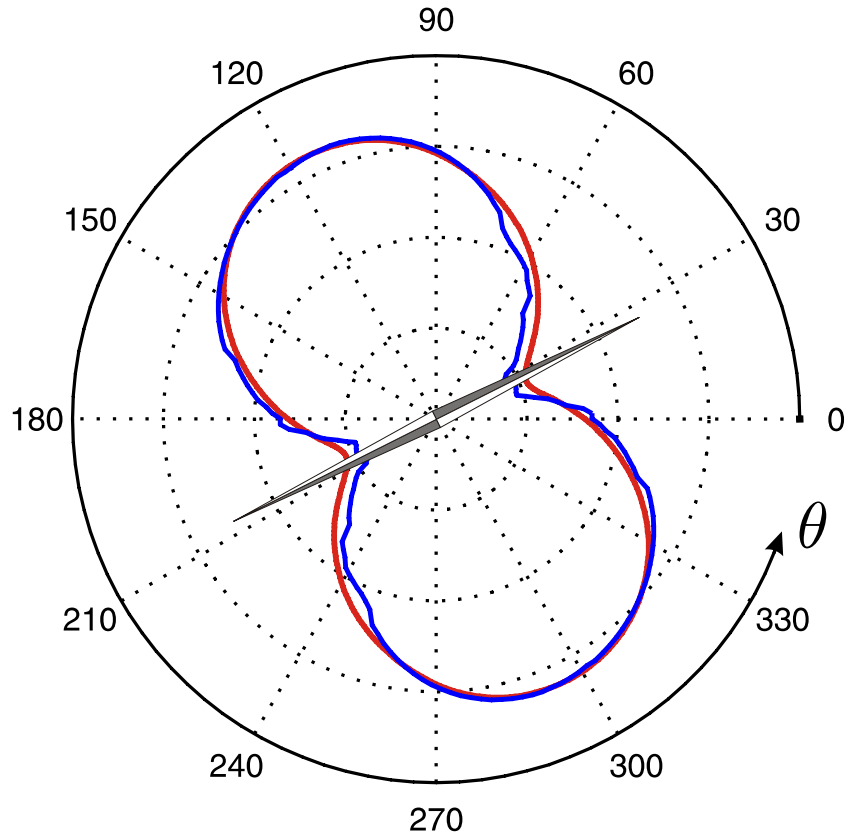


(a)



(b)

**Fig. 4.28** — Hologramme expérimental de fibres de papier déposées sur une lame de verre :  
(a) hologramme ; (b) plan restitué numériquement à la distance de mise au point.



**Fig. 4.29** — Estimation de la rose des intercepts à partir d'un hologramme numérique. Comparaison de la rose des intercepts estimée par application de la formule 4.20 (courbe bleue) sur l'hologramme de la figure 4.28(b) et la rose des intercepts construite par segmentation manuelle des fibres dans le plan restitué de la figure 4.28(a) (courbe rouge).

peuvent s'expliquer à la fois par le bruit présent dans l'hologramme (notamment les franges d'interférences dues à la lame de verre supportant les fibres), mais également par le défaut d'homogénéité de la source et l'effet de troncature pénalisant les fibres en bord de champ.

La rose des intercepts peut être traitée par une des techniques décrites dans [KP05] afin de reconstruire la rose des orientations. Il s'agit d'un problème d'inversion comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 1.2.

## 5 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une nouvelle approche permettant de réaliser une analyse directe, c'est à dire sans restitution numérique d'un volume 3D, des hologrammes. Notre démarche est stéréologique puisqu'à partir de données 2D (correspondant aux projections des objets étudiés) nous avons construit une méthode de reconstruction d'informations 3D (taille de la population 3D d'objets, orientation 3D des objets).

Nous avons commencé par établir une propriété fondamentale d'autocorrélation vérifiée par les hologrammes de micro-objets. Nous avons montré que cette propriété donnait accès au covariogramme géométrique moyen des objets. Nous avons alors développé des techniques permettant d'analyser ce covariogramme géométrique moyen afin d'obtenir l'information de diamètre moyen de traceurs sphériques ou reconstruisant la rose des orientations d'objets anisotropes. L'analyse quantitative du CGM s'exprime sous la forme d'un problème inverse. Nous avons proposé l'utilisation d'un algorithme itératif multiplicatif de type "maximum de vraisemblance contraint" afin de retrouver les directions privilégiées d'une population de fibres.

Les techniques d'analyse directe d'hologrammes ont été validées sur des hologrammes simulés numériquement, puis sur des hologrammes expérimentaux de gouttelettes d'eau et de fibres de papier.

Il est ainsi possible d'obtenir en quelques secondes (typiquement 2 secondes) la taille moyenne de particules sphériques à partir d'un hologramme. Dans le cas d'une population de fibres de taille calibrée, la reconstruction de la rose des orientations 3D est possible à partir d'un unique hologramme. Si les fibres sont de taille variable, seule une information d'orientation 2D — c'est à dire l'orientation des projections des fibres dans le plan de l'hologramme — est accessible. Il n'est pas possible dans ce cas de remonter à l'orientation 3D. Il faudrait pouvoir disposer de deux hologrammes pris selon des angles différents pour accéder par analyse directe à cette information 3D. Le traitement simultané de deux hologrammes s'exprime naturellement avec le formalisme "problème inverse" développé dans la partie 3.2.2.

L'intérêt des techniques d'analyse directe développées dans cette partie est tout d'abord la rapidité du traitement, ouvrant la possibilité d'un traitement *en ligne* des hologrammes. La mesure approchée de la taille moyenne de traceurs sphériques (à 10% près) permet de fournir un diamètre de départ pour l'algorithme construit au chapitre 3. Cette mesure approchée doit donc être considérée comme une première étape permettant ensuite une détection optimale des traceurs.

La formulation très générale développée pour analyser quantitativement le covariogramme géométrique moyen permet d'étendre le champ d'application des méthodes décrites à d'autres types d'objets. Ces techniques sont également applicables à l'analyse de la covariance morphologique de n'importe quelle image binaire.



# Conclusion

---

Dans ce manuscrit nous avons envisagé la problématique d'analyse des hologrammes numériques avec l'objectif d'aboutir à des mesures. Notre démarche s'est alors naturellement orientée vers le traitement de l'hologramme même, à la différence de la conception classique de l'holographie numérique comme système d'imagerie 3D pour lequel enregistrement de l'hologramme et restitution numérique forment un tout.

Nous avons proposé dans ce travail deux approches novatrices. La formalisation du problème de détection de micro-particules comme un problème inverse nous a permis de décrire un algorithme itératif alternant exploration de l'espace des paramètres, optimisation locale et gommage des franges d'interférence de la particule détectée. Nous avons également établi une propriété remarquable vérifiée par l'autocorrélation d'un hologramme. Des méthodes réalisant l'extraction de l'information de taille moyenne ou de distribution des orientations d'une population de micro-objets ont alors été développées selon une approche de stéréologie en projection.

L'analyse de la problématique de traitement des hologrammes numériques sous des angles de traitement du signal (analyse multirésolution), de problèmes inverses (déconvolution, optimisation) et de stéréologie (morphologie mathématique, inversion) nous a permis de présenter les apports variés de la littérature sous un cadre unifié et de proposer des approches originales. L'identification de l'origine du bruit d'image jumelle présent dans les images 3D restituées nous a conduit à analyser les méthodes existantes de suppression de l'image jumelle comme des techniques de déconvolution. L'absence de technique adaptée à la nature tridimensionnelle de nos objets nous a amenés à proposer un algorithme itératif, inspiré du débruitage en ondelettes. La réalisation d'un débruitage efficace s'est révélée indissociable de la segmentation des objets. Nous avons alors proposé une approche de détection de micro-particules selon une formalisation de type "problèmes inverses" permettant de s'affranchir des nombreuses limitations, dont le bruit d'images jumelles, de la segmentation des images 3D restituées. L'algorithme que nous avons conçu fournit une mesure de la position 3D et du diamètre de micro-gouttelettes avec une précision qui nous semble, d'après les premiers résultats, très supérieure à celle obtenue classiquement. Cet algorithme a permis de montrer pour la première fois la détection d'objets hors champ dont le signal est très fortement tronqué. La demande de traitements rapides d'hologrammes nous a amenés à proposer une analyse globale de ceux-ci. L'autocorrélation d'un hologramme permet d'atteindre le covariogramme géométrique moyen des projections des objets. Ce covariogramme porte l'information de taille et d'orientation des objets holographiés. Nous avons alors développé des méthodes d'extraction de cette information selon une démarche de stéréologie en projection. Il est ainsi possible de mesurer la taille moyenne d'une population d'objets et d'obtenir la rose



des intercepts des projections des objets. Il semble possible d'après des simulations de remonter dans certains cas à la distribution des orientations 3D.

Les travaux menés dans le cadre du traitement des hologrammes numériques nous a conduit à développer une bibliothèque de fonctions dans l'environnement de développement **Matlab**. Le cœur des algorithmes a été écrit en C/C++ sous forme de bibliothèques dynamiques accessibles sous **Matlab** (fonctions MEX).

Les formulations générales utilisées pour dériver les algorithmes de détection de micro-particules et d'analyse directe d'hologrammes par autocorrélation permettent d'envisager le traitement de plusieurs hologrammes d'une même scène. Les techniques d'analyse directe par autocorrélation gagneraient en précision, notamment pour la reconstruction des orientations, si plusieurs hologrammes étaient enregistrés avec des angles différents.

L'analyse d'une séquence d'hologrammes afin de réaliser un suivi lagrangien de particules soumises à de la turbulence reste un véritable défi en terme de temps de calcul. Des approches simplifiées de l'algorithme de détection sont encore à concevoir pour réduire de manière conséquente le temps de traitement et permettre ainsi l'analyse de séquences de milliers d'hologrammes.

À plus long terme, une modélisation plus poussée de la formation de l'hologramme permettrait d'améliorer encore la précision des algorithmes. Les résultats obtenus pourraient être étendus à d'autres types de montages holographiques par adaptation des modèles directs.

# Bibliographie

---

- [ALALA94] T. Alieva, Vicente Lopez, F. Agullo-Lopez, and L. B. Almeida. The fractional fourier transform in optical propagation problems. *Journal of modern optics*, 41(5) :1037–1044, 1994.
- [Alm94] L. B. Almeida. The fractional Fourier transform and time-frequency representations. *IEEE transactions on signal processing*, 42(11) :3084–3091, 1994.
- [BLCLz00] C. Buraga-Lefebvre, S. Coëtmellec, D. Lebrun, and C. Özkul. Application of wavelet transform to hologram analysis : three-dimensional location of particles. *Optics and Lasers in Engineering*, 33(6) :409–421, 2000.
- [BLO97] S. Belaid, D. Lebrun, and C. Ozkul. Application of two-dimensional wavelet transform to hologram analysis : visualization of glass fibers in turbulent flow. *Optical Engineering*, 36(7) :1947–1951, 1997.
- [CBLLz01] S. Coëtmellec, C. Buraga-Lefebvre, D. Lebrun, and C. Özkul. Application of in-line digital holography to multiple plane velocimetry. *Measurement Science and Technology*, 12 :1392–1397, 2001.
- [Cit31] P.H. van Cittert. Zum Einfluss der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien. II. *Zeitschrift für Physik A*, 69(5-6) :298–308, 1931.
- [CLC02] S. Coëtmellec, D. Lebrun, and Ö. Cafer. Characterization of diffraction patterns directly from in-line holograms with the fractional Fourier transform. *Applied Optics*, 41(2) :312–319, 2002.
- [CLz02] S. Coëtmellec, D. Lebrun, and C. Özkul. Application of the two-dimensional fractional-order fourier transformation to particle field digital holography. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(8) :1537–1546, 2002.
- [CMD00] E. Cuhe, P. Marquet, and C. Depeursinge. Spatial filtering for zero-order and twin image elimination in digital off-axis holography. *Applied Optics*, 39(23) :4070–4075, 2000.
- [CMF99] E. Chassande-Mottin and P. Flandrin. On the time-frequency detection of chirps. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 6 :252–281, 1999.
- [DFF<sup>+</sup>06] L. Denis, C. Fournier, T. Fournel, C. Ducottet, and D. Jeulin. Direct extraction of mean particle size from a digital hologram. *Applied Optics*, 45(5) :944–952, 2006.

- [DFFD05] L. Denis, C. Fournier, T. Fournel, and C. Ducottet. Twin-image noise reduction by phase retrieval in in-line digital holography. In *Wavelets XI, SPIE's Symposium on Optical Science and Technology*, volume 5914, San Diego, CA, USA, 2005.
- [DFFD06] L. Denis, T. Fournel, C. Fournier, and C. Ducottet. Cleaning digital holograms to investigate 3d particle fields. In *12th International Symposium on Flow Visualization*, Göttingen, Germany, 2006.
- [DFFJ06] L. Denis, T. Fournel, C. Fournier, and D. Jeulin. Reconstruction of the rose of directions from a digital micro-hologram of fibers. *J. Microsc.*, accepted, 2006.
- [DMYL02] F. Dubois, O. Monnom, C. Yourassowsky, and J.-C. Legros. Border processing in digital holography by extension of the digital hologram and reduction of the higher spatial frequencies. *Applied Optics*, 41(14) :2621–2626, 2002.
- [DWM86] M. E. Daube-Witherspoon and G. Muehllehner. An iterative image space reconstruction algorithm suitable for volume ECT. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 5(2) :61–66, 1986.
- [FDF04] C. Fournier, C. Ducottet, and T. Fournel. Digital in-line holography : influence of the reconstruction function on the axial profile of a reconstructed particle image. *Measurement Science and Technology*, 15 :686–693, 2004.
- [FGM<sup>+</sup>06] C. Fournier, C. Goepfert, J.L. Marié, L. Denis, F. Soulez, M. Lance, and J.P. Schon. Digital holography compared to phase doppler anemometry : Study of an experimental droplet flow. In *12th International Symposium on Flow Visualization*, Göttingen, Germany, 2006.
- [Fie82] J.R. Fienup. Phase retrieval algorithms : a comparison. *Applied Optics*, 21(15) :2758–2769, 1982.
- [Fou03] C. Fournier. *Holographie Numérique pour la Vélocimétrie par Images de Particules : extraction des 3 composantes du champ de vitesse dans un volume*. PhD thesis, Université Jean Monnet, 2003.
- [Gab48] D. Gabor. A new microscope principle. *Nature*, 161 :777, 1948.
- [Gab71] D. Gabor. Holography : 1948-1971, december 1971.
- [Goo96] J.W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Mc Graw-Hill, 1996.
- [Goo06] J.W. Goodman. *Speckle Phenomena : Theory and Applications*, volume à paraître. Roberts and Company, 2006.
- [GS72] R.W. Gerchberg and W.O. Saxton. A practical algorithm for the determination of phase from image and diffraction plane pictures. *Optik Vol*, 35(2) :237–246, 1972.

- 
- [GZRW03] C. Guo, L. Zhang, Z.-Y. Rong, and H.-T. Wang. Effect of the fill factor of CCD pixels on digital holograms : comment on the papers "frequency analysis of digital holography" and "frequency analysis of digital holography with reconstruction by convolution". *Optical Engineering*, 42(9) :2768–2771, 2003.
  - [Hög74] J. Högbom. Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. *A&AS*, 15 :417–426, 1974.
  - [HH01] S.F. Herrmann and K.D. Hinsch. Particle holography and the noise limit. In *4th International Symposium on PIV*, page 1021, Göttingen, Germany, 2001.
  - [HI76] N.R. Hill and G.E. Ioup. Convergence of the van Cittert iterative method of deconvolution. *J. Opt. Soc. Am.*, 66(5) :487–489, 1976.
  - [Hin02] K.D. Hinsch. Holographic particle image velocimetry. *Measurement Science and Technology*, 13 :61–72, 2002.
  - [Jeu92] D. Jeulin. Multivariate random image models. In *8th ISS Congress*, volume 11/SUPPL I, pages 59–66, Irvine, CA, 1992. Acta Stereologica.
  - [Jeu00] D. Jeulin. Random texture models for material structures. *Statistics and Computing*, 10 :121–132, 2000.
  - [JS04] M. Jacquot and P. Sandoz. Sampling of 2D images : keep free from spectrum overlapping and ghost detection. *Optical Engineering*, 43(1) :214–223, 2004.
  - [KAJ97] T.M. Kreis, M. Adams, and W. Juptner. Methods of digital holography : A comparison. In *SPIE97*, volume 3098, pages 224–233, Munich, Germany, 1997.
  - [KBB85] S. Kay and G. Faye Boudreaux-Bartels. On the optimality of the Wigner distribution for detection. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 10, pages 1017–1020, 1985.
  - [KJJ02] S. Kärkkäinen, E. B. V. Jensen, and D. Jeulin. On the orientational analysis of planar fibre systems from digital images. *J. Microsc.*, 207 :69–77, 2002.
  - [KJP91] G. Koren, D. Joyeux, and F. Polack. Twin-image elimination in in-line holography of finite-support complex objects. *Optics Letters*, 16(24) :1979–1981, 1991.
  - [KMY72] M. A. Kronrod, N. S. Merzlyakov, and L. Yaroslavskii. Reconstruction of a hologram with a computer. *Sov. Phys. Tech. Phys.*, 17 :333–334, 1972.
  - [KP05] M. Kiderlen and A. Pfrang. Algorithms to estimate the rose of directions of a spatial fibre system. *J. Microsc.*, 219(2) :50–60, 2005.
  - [KPJ93] G. Koren, F. Polack, and D. Joyeux. Iterative algorithms for twin-image elimination in in-line holography using finite-support constraints. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(3) :423–433, 1993.

- [Kre02] T. M. Kreis. Frequency analysis of digital holography. *Optical Engineering*, 41(4) :771–778, 2002.
- [Kre05] T.M. Kreis. *Handbook of Holographic Interferometry*. Wiley-Vch, 2005.
- [KTMD99] H. Krim, D. Tucker, S. Mallat, and D. Donoho. On denoising and best signal representation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(7) :2225–2238, 1999.
- [Lan77] A. Lannes. Correction des effets de l’image jumelle et du terme quadratique en holographie de gabor. *Optics Communications*, 20(3) :356–359, 1977.
- [LBCM03] D. Lebrun, A. Benkouider, S. Coëtmellec, and M. Malek. Particle field digital holographic reconstruction in arbitrary tilted planes. *Optics Express*, 11(3) :224–229, 2003.
- [LBO99] D. Lebrun, S. Belaid, and C. Ozkul. Hologram reconstruction by use of optical wavelet transform. *Applied Optics*, 38(17) :3730–3734, 1999.
- [LBU03] M. Liebling, T. Blu, and M. Unser. Fresnelets : New multiresolution wavelet bases for digital holography. *IEEE Transactions on image processing*, 12(1) :29–43, 2003.
- [LBU04] M. Liebling, T. Blu, and M. Unser. Complex-wave retrieval from a single off-axis hologram. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(3) :367–377, 2004.
- [Li87] W. Li. Wigner distribution method equivalent to dechirp method for detecting a chirp signal. *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, 35(8) :1210–1211, 1987.
- [LKB99] S. Lai, B. Kemper, and G. von Bally. Off-axis reconstruction of in-line holograms for twin-image elimination. *Optics Communications*, 169 :37–43, 1999.
- [LRA02] H. Lantéri, M. Roche, and C. Aime. Penalized maximum likelihood image restoration with positivity constraints : multiplicative algorithms. *Inverse Problems*, 18 :1397–1419, 2002.
- [LS87] G. Liu and P.D. Scott. Phase retrieval and twin-image elimination for in-line Fresnel holograms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4(1) :159–165, 1987.
- [LS94] A.W. Lohmann and B.H. Soffer. Relationships between the Radon-Wigner and fractional Fourier transforms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(6) :1798–1801, 1994.
- [LU62] E.N. Leith and J. Upatnieks. Reconstructed wavefronts and communication theory. *J. Opt. Soc. Am.*, 52(10) :1123–1130, 1962.
- [LU04] M. Liebling and M. Unser. Autofocus for digital Fresnel holograms by use of a Fresnelet-sparsity criterion. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(12) :2424–2430, 2004.

- 
- [LU05] M. Liebling and M. Unser. Comparing algorithms for reconstructing digital off-axis Fresnel holograms. In *Proceedings of the SPIE Conference on Three-Dimensional TV, Video, and Display IV*, volume 6016, pages 213–222, Boston MA, USA, 2005.
  - [Luc74] L. B. Lucy. An iterative technique for the rectification of observed distributions. *Astron. J.*, 79 :745–754, 1974.
  - [MACL04] M. Malek, D. Allano, S. Coetmellec, and D. Lebrun. Digital in-line holography : influence of the shadow density on particle field extraction. *Optics Express*, 12(10) :2270–2279, 2004.
  - [MAHL93] H. Meng, W.L. Anderson, F. Hussain, and D.D. Liu. Intrinsic speckle noise in in-line particle holography. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(9) :2046–2058, 1993.
  - [MCAL03] M. Malek, S. Coëtmelec, D. Allano, and D. Lebrun. Formulation of in-line holography process by a linear shift invariant system : application to the measurement of fiber diameter. *Optics communications*, 223 :263–271, 2003.
  - [MD94] M.H. Maleki and A.J. Devaney. Noniterative reconstruction of complex-valued objects from two intensity measurements. *Optical Engineering*, 33(10) :3243–3253, 1994.
  - [MFGB00] D. Mas, C. Ferreira, J. Garcia, and L.M. Bernardo. From Fresnel patterns to fractional Fourier transform through geometrical optics. *Optical Engineering*, 39(6) :1427–1430, 2000.
  - [MO93] D. Mendlovic and H. M. Ozaktas. Fractional fourier transforms and their optical implementation : I. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(9) :1875–1881, 1993.
  - [MS83] J.J. Moré and D.C. Sorensen. Computing a trust region step. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 4 :553–572, 1983.
  - [MY00] S. Murata and N. Yasuda. Potential of digital holography in particle measurement. *Optics and Laser Technology*, 32(7 8) :567–574, 2000.
  - [Nam80] V. Namias. The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics. *IMA J. Appl. Math.*, 25 :241–265, 1980.
  - [NKH89] K. Nishino, N. Kasagi, and M. Hirata. Three-dimensional particle tracking velocimetry based on automated digital image processing. *Journal of Fluids Engineering*, 111 :384–391, 1989.
  - [Nug90] K. A. Nugent. Twin-image elimination in Gabor holography. *Optics Communications*, 78 :293–299, 1990.
  - [OBMO94] H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic, and L. Onural. Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(2) :547– 559, 1994.

- [OK95] L. Onural and M. Kocatepe. Family of scaling chirp functions, diffraction, and holography. *IEEE transactions on signal processing*, 43(7) :1568–1578, 1995.
- [OM93] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic. Fractional Fourier transforms and their optical implementation : Ii. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(12) :2522–2531, 1993.
- [OM95] H. M. Ozaktas and D. Mendlovic. Fractional Fourier optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(4) :743–751, 1995.
- [Onu93] L. Onural. Diffraction from a wavelet point of view. *Optics Letters*, 18(11) :846, 1993.
- [OS87] L. Onural and P.D. Scott. Digital decoding of in-line holograms. *Optical Engineering*, 26(11) :1124–1132, 1987.
- [PF94] P. Pellat-Finet. Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform. *Optics Letters*, 19(18) :1388–1390, 1994.
- [PKI<sup>+</sup>00] T.C. Poon, T. Kim, G. Indebetouw, B.W. Schilling, M.H. Wu, K. Shinoda, and Y. Suzuki. Twin-image elimination experiments for three-dimensional images in optical scanning holography. *Optics Letters*, 25(4) :215–217, 2000.
- [PM03] G. Pan and H. Meng. Digital holography of particle fields : reconstruction by use of complex amplitude. *Applied Optics*, 42 :827–833, 2003.
- [PYJ06] T.C. Poon, T. Yatagai, and W. Jüptner. Digital holography – Coherent optics of the 21st century : introduction. *Applied Optics*, 45(5) :821, 2006.
- [Ric72] W. H. Richardson. Bayesian-based iterative method of image restoration. *J. Opt. Soc. Am.*, 62 :55–59, 1972.
- [Roy77] H. Royer. Holographic velocimetry of submicron particles. *Optics Communications*, 20(1) :73–75, 1977.
- [RS03] P. Rastogi and A. Sharma. Systematic approach to image formation in digital holography. *Optical Engineering*, 42(5) :1208–1214, 2003.
- [RSZ94] E. A. Rakhmanov, E. B. Saff, and Y. M. Zhou. Minimal discrete energy on the sphere. *Mathematical Research Letters*, 1 :647–662, 1994.
- [SB91] D. Stoyan and V. Benes. Anisotropy analysis for particle systems. *J. Microsc.*, 164(2) :159–168, 1991.
- [SDF<sup>+</sup>06] F. Soulez, L. Denis, C. Fournier, E. Thiébaud, and C. Goepfert. Inverse problem approach for particle digital holography : accurate location based on local optimisation. *J. Opt. Soc. Am. A*, à paraître, 2006.
- [SDFT06] F. Soulez, L. Denis, C. Fournier, and E. Thiébaud. Optimisation pour le traitement d’hologrammes numériques. In *Journées “Imagerie optique non conventionnelle”*, ESPCI, Paris, 2006.

- 
- [SDM<sup>+</sup>79] J. P. Schon, F. Danel, J. P. Melinand, C. Rey, and G. Charnay. Measurement of lagrangian velocity by means of a rotating laser beam. In *Sixth biannual symposium on turbulence*, La Rolla, Missouri, 1979.
  - [Ser68] J. Serra. Les fonctions aléatoires de dilution. Technical Report 37, CMM, rapport de l'Ecole des Mines de Paris, 1968.
  - [Ser82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, New York, 1982.
  - [SF04] S. Sotthivirat and J.A. Fessler. Penalized-likelihood image reconstruction for digital holography. *J. Opt. Soc. Am. A*, 21(5) :737–750, 2004.
  - [SJ94] U. Schnars and W. Juptner. Direct recording of holograms by a CCD target and numerical reconstruction. *Applied Optics*, 33(2) :179–181, 1994.
  - [SJ04] A. Stern and B. Javidi. Analysis of practical sampling and reconstruction from Fresnel fields. *Optical Engineering*, 43(1) :239–250, 2004.
  - [SKM95] D. Stoyan, W. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic Geometry and its Applications*. Wiley, 2nd edition edition, 1995.
  - [SM00] A. Stadelmaier and J. H. Massig. Compensation of lens aberrations in digital holography. *Optics Letters*, 25(22) :1630–1632, 2000.
  - [SPM02] J. L. Starck, E. Pantin, and F. Murtagh. Deconvolution in astronomy : A review. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 114 :1051–1069, 2002.
  - [SV82] L. A. Shepp and Y. Vardi. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 1(2) :113–122, 1982.
  - [Tar05] A. Tarantola. *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM, 2005.
  - [TBPN00] J.B. Tiller, A. Barty, D. Paganin, and K.A. Nugent. The holographic twin image problem : a deterministic phase solution. *Optics Communications*, 183 :7–14, 2000.
  - [Thi02] E. Thiébaud. Optimization issues in blind deconvolution algorithms. In *Astronomical Data Analysis II*, volume 4847, pages 174–183. SPIE, 2002.
  - [Thi05] E. Thiébaud. Introduction to image reconstruction and inverse problems. In R. Foy and F. C Foy, editors, *Optics in Astrophysics*. Kluwer Academic, 2005.
  - [TT76] G. A. Tayler and B. J. Thompson. Fraunhofer holography applied to particle size analysis : a reassessment. *Opt. Acta.*, 23 :261–304, 1976.
  - [WB94] J.C. Wood and D.T Barry. Radon transformation of time-frequency distributions for analysis of multicomponent signals. *IEEE transactions on signal processing*, 42(11) :3166–3177, 1994.



- [XMA00] L. Xu, J. Miao, and A. Asundi. Properties of digital holography based on in-line configuration. *Optical Engineering*, 39(12) :3214–3219, 2000.
- [YDG<sup>+</sup>94] G. Yang, B. Dong, B. Gu, J. Zhuang, and O. Ersoy. Gerchberg-Saxton and Yang-Gu algorithms for phase retrieval in a nonunitary transform system : a comparison. *Applied Optics*, 33(2) :209–218, 1994.
- [YXZJ99] S. Yang, X. Xie, Y. Zhao, and C. Jia. Reconstruction of near-field in-line hologram. *Optics Communications*, 159 :29–31, 1999.
- [YZ97] I. Yamaguchi and T. Zhang. Phase-shifting digital holography. *Optics Letters*, 22(16) :1268–1270, 1997.
- [ZPOT03] Y. Zhang, G. Pedrini, W. Osten, and H.J. Tiziani. Whole optical wave field reconstruction from double or multi in-line holograms by phase retrieval algorithm. *Optics Express*, 11(24) :3234–+, 2003.
- [ZPOT04a] Y. Zhang, G. Pedrini, W. Osten, and H.J. Tiziani. Applications of fractional transforms to object reconstruction from in-line holograms. *Optics Letters*, 29(15) :1793–1795, 2004.
- [ZPOT04b] Y. Zhang, G. Pedrini, W. Osten, and H.J. Tiziani. Reconstruction of in-line digital holograms from two intensity measurements. *Optics Letters*, 29(15) :1787–1789, 2004.
- [ZZ03] Y. Zhang and X. Zhang. Reconstruction of a complex object from two in-line holograms. *Optics Express*, 11(6) :572–+, 2003.



## Résumé

---

Une image-hologramme de micro-objets contient l'information de taille, forme et localisation tridimensionnelle des objets. Cette information est codée par la modulation de fréquence et d'amplitude des franges d'interférence de l'hologramme. L'extraction de cette information est classiquement réalisée par analyse du volume 3D restitué par transformée de Fresnel, transformée de Fourier fractionnaire ou transformée en ondelettes. Plusieurs types d'artefacts apparaissent cependant dans les images restituées : déformation près des bords du support de l'hologramme, focalisation multiple, apparition d'images jumelles.

L'analyse de la problématique de traitement des hologrammes numériques sous des angles de traitement du signal et de déconvolution nous permettent de présenter les apports variés de la littérature sous un cadre unifié. Nous suggérons d'utiliser une formulation de type "problème inverse" basée sur le modèle physique de formation de l'hologramme pour résoudre les difficultés posées par les artefacts des images restituées. L'algorithme proposé permet de réaliser la détection de micro-particules dans un volume d'étude 4 fois supérieur et avec une précision améliorée d'un facteur 5 par rapport à la technique classique.

L'enjeu du traitement rapide d'hologrammes nous a poussés à développer une approche de stéréologie en projection donnant accès à une estimation de la taille moyenne ou de la distribution d'orientations d'une population de micro-objets.

**Mots clefs :** traitement d'images, holographie numérique, problème inverse, morphologie mathématique, stéréologie, image jumelle.

## Abstract

---

A hologram of micro-objects contains information about the size, shape and 3D localization of the objects. This information is coded in the hologram by the frequency and amplitude modulations of the interference fringes. The extraction of this information is classically done by analyzing the 3D volume reconstructed with a Fresnel transform, a fractional Fourier transform or a wavelet transform. However, several types of artifacts appear in the reconstructed images : distortions close to the image boundaries, multiple focusing, twin-images.

The analysis of the issue of digital hologram processing under the light of signal processing and deconvolution makes it possible to give a unified description of previous contributions found in literature. We suggest an "inverse problem" approach based on the physical model of hologram formation to circumvent the artifacts of reconstructed images. The proposed algorithm detects micro-particles in a volume 4 times larger and with a precision improved by a factor 5 compared with classical techniques.

On-line processing of digital holograms requires fast processing algorithms. We have developed a stereological approach to estimate the mean size or the distribution of directions of a population of micro-objects.

**Key words :** image processing, digital hologram, inverse problem, mathematical morphology, stereology, twin image.